Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018
Maths III PMI 4 décembre 2017. Durée : 1h30

Devoir n° 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Les exercices sont indépendants.*

Partie Algèbre

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $(X+1)(X-1)^2$.
2. Trigonaliser la matrice A. On calculera explicitement une forme triangulaire supérieure et une matrice de passage.
3. Justifier que le polynôme minimal de A est divisible par $(X+1)(X-1)$.
4. Justifier que A n'est pas diagonalisable.
5. En déduire le polynôme minimal de A.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée de taille $n \geq 1$ sur $\mathbb{C}$. On note $m_A(X)$ son polynôme minimal sur $\mathbb{C}$, dont on note d le degré.

1. Dans cette question, on suppose que A n'est pas inversible. On se propose de montrer qu'il existe une matrice B non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $BA = AB = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme non nul $Q(X)$ tel que $m_A(X) = XQ(X)$.
   (b) Conclure.
   (c) Soit $S(X)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que $S(A)A = AS(A) = 0$ si et seulement si $S(X)$ est un multiple de $Q(X)$.
2. Dans cette question, on suppose que A est inversible. On se propose de montrer qu'il existe un unique polynôme $P(X)$ de degré inférieur ou égal à $d-1$ tel que $A^{-1} = P(A)$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme non nul $Q(X)$ et un scalaire non nul λ tels que $m_A(X) = \lambda + XQ(X)$.
   (b) Déterminer un polynôme $P(X)$ de degré $d-1$ tel que $A^{-1} = P(A)$.
   (c) Montrer que $P(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $d-1$ vérifiant $A^{-1} = P(A)$.

Partie Analyse

Exercice 3. Soit U dans $\mathbb{R}^2$ le demi-plan ouvert $\{(x,y) : x > 0\}$. On définit une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ par la règle $\varphi(x,y) = (\ln(1+x),\, xe^y + e^{xy})$. On observe que φ est de classe C^1 sur son domaine U(admis).

1. Calculer la matrice jacobienne de φ en un point (x,y) de U, et ensuite en $(1,0)$.
2. Trouver le DL d'ordre un de la composante $\varphi_2(x,y) = xe^y + e^{xy}$ autour du point $(1,0)$.
3. Montrer que φ est injective.
4. Prouver que l'ensemble $V = \varphi(U)$ (l'image de U par φ) coïncide avec le premier quadrant ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0\}$.
5. Rappeler la définition de la phrase suivante : $\varphi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme.
6. Prouver que $\varphi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme.

(suite au verso)

Exercice 4. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Est-ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$?
3. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$. (Indication : montrer que f_n est positive sur $]0,1[$, et trouver où elle atteint son maximum.)
4. En vue de la partie (3), pourquoi peut-on dire, sans même le vérifier directement, que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f' sur $[0,1]$?
5. Soit $a \in]0,1[$. Prouver que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$.