Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2017-2018

Math IV - Cursus préparatoire 2A — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. Déterminer explicitement l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$ (on pourra s'aider d'un dessin si on le souhaite mais une démonstration formelle est attendue).

Exercice 2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On donnera une démonstration précise ou un contre-exemple dans chacun des cas.

1. Soit E un espace vectoriel normé (de dimension quelconque) et $a \in E$. L'ensemble $\{a\}$ est un compact de E.
2. L'image réciproque par une application continue d'un compact est un compact.
3. L'ensemble $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + xz + z^2 + 2y^2 \leq 3\}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit E un espace préhilbertien réel, dont on note $\langle\, ,\rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée. Pour tout $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall y \in E, \quad \varphi_x(y) = \langle y, x\rangle.$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, φ_x est lipschitzienne de rapport $\|x\|$ (*i.e.* est $\|x\|$-lipschitzienne).
2. Soit A une partie de E.
   (a) Montrer que $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \varphi_a^{-1}(\{0\})$ (où $A^\perp$ désigne l'orthogonal de A).
   (b) En déduire que $A^\perp$ est un fermé de E.

Partie ALGÈBRE

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec sa transposée. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A^p est la matrice nulle.

1. Montrer que la matrice $B = {}^t\!AA$ est symétrique positive.
2. Montrer que B est la matrice nulle.
3. En déduire que la matrice A est nulle.

Exercice 5. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et a un vecteur unitaire de E. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle x, a\rangle a + a \wedge x.$$

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\langle x, y\rangle^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$.
2. Pour tout $x \in E$, simplifier $\|f(x)\|^2$ et en déduire que f est un endomorphisme orthogonal.
3. (a) Soit $y \in E$. Montrer que $y = a \wedge y$ si et seulement si $y = 0_E$.

   (b) Montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est égal à $\mathrm{Vect}(a)$ (*Indication : pour un vecteur x bien choisi, on pourra chercher à étudier $a \wedge f(x)$*).
4. (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E dont le premier vecteur est a.

   (b) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire la nature géométrique de f (on précisera les éléments caractéristiques de f).

Correction du devoir surveillé 4 - partie commune

Correction de l'exercice 1

- On peut remarquer que $A = f^{-1}(]1;+\infty[)$ où $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Par suite, A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de l'intervalle ouvert $]1;+\infty[$ par la fonction continue f. Ainsi, A est égal à son intérieur.
- Soit $(x,y) \in \overline{A}$. Il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers (x,y). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $X_n = (x_n, y_n)$ et $x_n y_n > 1$ (*). Par caractérisation des limites dans un espace produit (ou en dimension finie), on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. En passant à la limite dans $(*)$, il vient donc $xy \geq 1$ ce qui démontre que $\overline{A} \subset B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1\}$.

  Réciproquement, puisque l'on sait que $A \subset \overline{A}$ d'après le cours, il nous reste seulement à montrer que si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $xy = 1$, alors $(x,y) \in \overline{A}$. Pour cela, on va construire une suite d'éléments de A convergeant vers (x,y). Puisque $xy = 1$, il vient $x \neq 0$ et $y = \dfrac{1}{x}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x$ et $y_n = y + \dfrac{1}{xn}$. Comme $x \neq 0$, lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{1}{xn} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ainsi la suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers (x,y). De plus, pour tout $n \geq 1$,

  $$x_n y_n = x\left(y + \frac{1}{xn}\right) = 1 + \frac{1}{n} > 1$$

  ce qui montre que $(x_n, y_n) \in A$. Ainsi, $(x,y) \in \overline{A}$ ce qui démontre que $\overline{A} = B$.

Correction de l'exercice 2

1. VRAI : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\{a\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a$, donc la suite est constante égale à a, donc elle converge vers $a \in \{a\}$. On a donc trouvé une sous-suite de $(x_n)_n$ (à savoir elle-même) qui converge vers un élément de $\{a\}$, ce qui démontre que $\{a\}$ est bien un compact de E.
2. FAUX : considérons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $\{0\}$ est un compact de $\mathbb{R}$, f est une application continue car constante, et $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \mathbb{R}$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}$ puisqu'il n'est pas borné.
3. VRAI : puisque $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension finie, les compacts de $\mathbb{R}^3$ sont exactement les fermés bornés. De plus, les normes sur $\mathbb{R}^3$ sont toutes équivalentes donc on peut choisir celle que l'on veut pour l'étude du caractère fermé et borné de C. On peut montrer que C est un fermé de $\mathbb{R}^3$ en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés, ou en remarquant que $C = g^{-1}(]-\infty;3])$ avec $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2 + xz + z^2 + 2y^2$ continue car polynomiale.

   Soit $(x,y,z) \in C$, alors par mise sous forme canonique

   $$\begin{aligned} x^2 + xz + z^2 + 2y^2 \leq 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4} + z^2 + 2y^2 \leq 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}z^2 + 2y^2 \leq 3 \end{aligned}$$

   Puisque chacun des termes intervenant dans la somme ci-dessus est positif, on en déduit qu'il sont tous inférieurs à 3 :

   $$\frac{3}{4}z^2 \leq 3 \iff z^2 \leq 4 \iff |z| \leq 2, \quad 2y^2 \leq 3 \iff |y| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

   et

   $$\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 \leq 3 \iff \left|x + \frac{z}{2}\right| \leq \sqrt{3} \quad \text{d'où} \quad |x| \leq |x - z| + |z| \leq \sqrt{3} + 2.$$

Ainsi, on obtient que pour tout $(x, y) \in C$,

$$\|(x, y, z)\|_1 = |x| + |y| + |z| \leq \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} + 4 := M$$

ce qui démontre que C est borné. C'est donc bien un compact de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 3

1. Soit $x \in E$. Soient $y, z \in E$, alors par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$|\varphi_x(y) - \varphi_x(z)| = |\langle y, x\rangle - \langle z, x\rangle| = |\langle y - z, x\rangle| \leq \|y - x\|\|x\|$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui démontre bien que φ_x est $\|x\|$-lipschitzienne.

2. (a) On sait que

$$\begin{aligned} A^{\perp} &= \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a\rangle = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall a \in A, \varphi_a(x) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall a \in A, x \in \varphi_a^{-1}(\{0\})\} \\ &= \bigcap_{a \in A} \varphi_a^{-1}(\{0\}). \end{aligned}$$

(b) Pour tout $a \in E$, la fonction φ_a est continue sur E car lipschitzienne, et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc $\varphi_a^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E. Par suite, $A^{\perp}$ est un fermé comme intersection (quelconque) de fermés.

Correction de l'exercice 4

1. Tout d'abord, ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = B$ donc B est symétrique. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$${}^tXBX = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geq 0$$

où l'on a muni $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel et $\| \ \|$ est la norme associée. Ainsi, B est positive.

2. Puisque la matrice B est symétrique réelle, par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale réelle $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telle que $B = PDP^{-1}$. De plus, on peut remarquer que puisque A et ${}^tA$ commutent, $B^p = ({}^tA)^pA^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ puisque $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. D'autre part, on a aussi $B^p = PD^pP^{-1}$ ce qui entraîne $D^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ avec $D^p = \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$. Il s'ensuit que $D = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et donc $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ aussi.

3. On peut par exemple utiliser le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\langle M, N\rangle = \operatorname{Tr}({}^tMN)$. On remarque alors que $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \operatorname{Tr}({}^tAA) = \operatorname{Tr}(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 0$ ce qui entraîne $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Correction de l'exercice 5

1. Soient $x, y \in E$. Notons $\theta = (\widehat{x, y})$ l'angle orienté entre x et y. Alors par le cours, $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos(\theta)$ et $\|x \wedge y\| = \|x\|\|y\|\,|\sin(\theta)|$. Ainsi,

$$\langle x, y\rangle^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = \|x\|^2\|y\|^2.$$

2. Soit $x \in E$, comme a et $a \wedge x$ sont orthogonaux, on obtient par Pythagore

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|^2 &= \|\langle x, a\rangle a\|^2 + \|a \wedge x\|^2 \\
&= |\langle x, a\rangle|^2 \|a\|^2 + \|a \wedge x\|^2 \\
&= \langle x, a\rangle^2 + \|a \wedge x\|^2 \text{ car } a \text{ unitaire} \\
&= \|x\|^2 \|a\|^2 \text{ par la question précédente} \\
&= \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Par positivité de la norme, il s'ensuit que $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qui démontre que $f \in O(E)$ (car f conserve la norme).

3. (a) Il est clair que si $y = 0_E$, alors $a \wedge 0_E = 0_E$. Réciproquement, supposons que $y = a \wedge y$, alors $\|y\|^2 = \langle y, a \wedge y\rangle = 0$ ce qui entraîne $y = 0_E$.

   (b) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$, alors $f(x) = x$. En particulier, en utilisant le fait que le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul, on en déduit que

$$a \wedge x = a \wedge f(x) = a \wedge (\langle x, a\rangle a + a \wedge x) = \langle x, a\rangle \underbrace{a \wedge a}_{=0_E} + a \wedge (a \wedge x).$$

   Par la question précédente, on obtient que $a \wedge x = 0$ ce qui donne $x \in \operatorname{Vect}(a)$ (car $a \neq 0_E$).

   Réciproquement, si $x \in \operatorname{Vect}(a)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$ et alors

$$f(x) = \langle \lambda a, a\rangle a + (\lambda a) \wedge a = \lambda \|a\|^2 a + 0_E = x$$

   ce qui démontre que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(a)$.

4. (a) Puisque a est unitaire, $\operatorname{Vect}(a)$ est de dimension 1 et son orthogonal de dimension 2. On peut donc choisir un vecteur unitaire dans $\operatorname{Vect}(a)^\perp$, noté e_2 (on peut prendre un vecteur quelconque non nul dans $\operatorname{Vect}(a)^\perp$ et le diviser par sa norme). Alors en posant $e_3 = a \wedge e_2$, la famille $\mathcal{B} = (a, e_2, e_3)$ est une base orthonormée directe de E.

   (b) On a déjà vu que $f(a) = a$. De plus,

$$f(e_2) = \underbrace{\langle e_2, a\rangle}_{=0} a + a \wedge e_2 = e_3 \quad \text{ et } f(e_3) = \underbrace{\langle e_3, a\rangle}_{=0} a + a \wedge e_3 = -e_3 \wedge a = -e_2$$

   ce qui entraîne

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ 0 & \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}$$

   On en déduit que f est la rotation autour de l'axe $\operatorname{Vect}(a)$ dirigé et orienté par a, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.