Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Mathématiques III PMI 13 novembre 2020. Durée : 1 h 30

Devoir n° 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**

Les exercices sont indépendants.

Partie algèbre

Exercice 1 Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $P_A(x)$ le polynôme caractéristique de A. En utilisant sa définition, mais sans le calculer pour l'instant, montrer que 1 est une valeur propre de A.
2. Montrer que $P_A(x)$ peut s'écrire sous la forme $P_A(x) = (x-1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.
3. Identifier en fonction des valeurs de a toutes les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité.

Exercice 2 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, dont la matrice B dans la base canonique s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de u ? Bien justifier.
2. On note v la restriction de u à $\ker u$. Que vaut $P_v(x)$, le polynôme caractéristique de v ?
3. Soit $P_u(x)$ le polynôme caractéristique de u. Montrer que $P_u(x) = P_v(x)Q(x)$, où Q est un polynôme que l'on ne cherchera pas à déterminer. Quel est le degré de Q ?
4. On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que X soit vecteur propre de B.
5. En déduire toutes les valeurs propres de u ainsi que leur multiplicité.

Exercice 3

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$.
2. Soit a, b et c trois réels positifs avec $a+b+c>2$.
   Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $\dfrac{|x|^a|y|^b|z|^c}{x^2+y^2+z^2} \to 0$ quand $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

Exercice 4 Pour a réel, on note g_a l'application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g_a(x,y) = \frac{x^2+axy+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

1. Montrer que, pour tout a réel, il est bien possible de définir la fonction g_a sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Pour m paramètre réel, étudier la limite de la restriction de g_a à la droite d'équation $y = mx$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ sur cette droite.
3. Étudier de même la limite en $(0,0)$ de la restriction de g_a à la droite d'équation $x=0$.
4. Discuter en fonction de a si la fonction g_a admet ou non un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Dire (et justifier) pour chacune des deux fonctions suivantes si elle est ou non bornée sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_1(x,y) = x^2e^{-y^2} \qquad f_2(x,y) = x^2e^{-x^2-y^2}$$

Exercice 6 Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
On suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(a)-f(b)| \leq 4\|a-b\|$$

1. Montrer que pour tous c, d dans $\mathbb{R}^2$, $f(d) \geq f(c) - 4\|d-c\|$.
2. Montrer que $\{c \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < f(c)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.