Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Mathématiques en cursus préparatoires, 2 ème année

Corrigé du devoir commun numéro 3

Exercice 1. *Déterminer la nature des séries de terme général :*

1. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

   On a ici un terme général positif, et vue la forme de l'expression on applique le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)}$$

$$\text{D'où } \frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

   D'apr es le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

2. $v_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

   On utilise à nouveau le critère de d'Alembert :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2-n^2}} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$$

   On a ici le quotient d'une suite polynomiale en n par une suite géométrique qui tend vers $+\infty$, d'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Par le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 2. *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet espace deux applications : si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$*

$$N(P) = \sum_{k=0}^{p} |a_k| \qquad N'(P) = \int_0^1 |P(t)|dt$$

1. *Montrer que N et N' définissent des normes sur E.*

   Commençons par l'application N :

   Séparation : Supposons que $N(P) = 0$, alors $\sum_{k=0}^{p} |a_k| = 0$. On a ici une somme de termes positifs nulle, donc chacun des termes est nul : $\forall k \in [0;p]$, $a_k = 0$. Donc P est le polynôme nul.

   Homogénéité : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors

$$N(\lambda P) = \sum_{k=0}^{p} |\lambda a_k| = \sum_{k=0}^{p} |\lambda||a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{p} |a_k| = |\lambda|N(P)$$

Inégalité triangulaire : Soient $P_1 = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $P_2 = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux éléments de E, alors :

$$\begin{aligned} N(P_1 + P_2) &= \sum_{k=0}^{\max(p,q)} |a_k + b_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\max(p,q)} |a_k| + |b_k| \\ &\leq N(P_1) + N(P_2) \end{aligned}$$

Donc N est bien une norme. Pour N', l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont simples, elles proviennent des propriétés de la valeur absolue et de la linéarité de l'intégrale. Pour la séparation, si on suppose $N'(P) = 0$, alors $\int_0^1 |P(t)|dt = 0$. Ici, on a l'intégrale d'une fonction positive et continue qui est nulle, donc la fonction est nulle et $\forall t \in [0;1]$, $P(t) = 0$. Le polynôme P a donc une infinité de racines distinctes, d'où $P = 0$. Donc N' est bien une norme sur E.

2. *Montrer que pour tout $P \in E$, on a $N'(P) \leq N(P)$, mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.*
Indication : on pourra considérer les polynômes X^n, $n \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer l'inégalité, considérons un polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors on a :

$$\begin{aligned} N'(P) &= \int_0^1 |P(t)|dt = \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{p} a_k t^k \right| dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{p} |a_k| \int_0^1 |t^k|dt = \sum_{k=0}^{p} |a_k| \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Or, pour $k \in \{0, ..., p\}$, on a $\frac{1}{k+1} \leq 1$, d'où $N'(P) \leq N(P)$.
Pour montrer que les deux normes ne sont pas équivalentes, il faut montrer qu'on ne peut avoir l'inégalité inverse : $\exists C > 0, \forall P \in E, N(P) \leq CN'(P)$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} E \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ P &\longmapsto \frac{N(P)}{N'(P)} \end{aligned}$$

n'est pas bornée, on considère donc les polynômes indiqués : pour $n \in \mathbb{N}$, $N(X^n) = 1$ et $N'(X^n) = \frac{1}{n+1}$, d'où

$$\frac{N(X^n)}{N'(X^n)} = n + 1 \longrightarrow_{n \to +\infty} +\infty$$

ce qui démontre bien le résultat voulu.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application :

$$N_a : \quad E \to \mathbb{R}^+ \quad P \mapsto |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt$$

3. *Montrer que N_a définit une norme sur E. On pourra se contenter de l'axiome de séparation.*

On démontre donc l'axiome de séparation : soit $P \in E$ tel que $N_a(P) = 0$, alors $|P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt = 0$. On a ici la somme de deux termes positifs nulle, donc les deux termes sont nuls : $P(a) = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)|dt = 0$, d'où $N'(P') = 0$ et comme N' est une norme, on en déduit que $P' = 0$. Donc P est constant et comme $P(a) = 0$, $P = 0$.

L'inégalité triangulaire et l'homogénéité étant triviales, N_a est bien une norme.

4. *Montrer que pour tout $P \in E$, on a :*

$$N'(P) \leq N_0(P) \leq N(P)$$

Indication : pensez à utiliser la formule $P(y) = P(x) + \int_x^y P'(t)dt$.

On considère $P \in E$, on a alors :

$$\begin{aligned} N'(P) = \int_0^1 |P(t)|dt = \int_0^1 |P(0) + \int_0^t P'(x)dx|dt &\leq \int_0^1 |P(0)|dt + \int_0^1 \int_0^t |P'(x)|dxdt \\ \leq |P(0)| + \int_0^1 \int_0^1 |P'(x)|dxdt = |P(0)| + \int_0^1 |P'(x)|dx = N_0(P) \end{aligned}$$

Ce qui démontre la première partie de l'inégalité. Pour la seconde, on écrit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, et donc $P' = \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1}$. D'où

$$\begin{aligned} N_0(P) = |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)|dt &= |a_0| + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^p k a_k t^{k-1} \right| dt \\ &\leq |a_0| + \sum_{k=1}^p k|a_k| \int_0^1 t^{k-1}dt = |a_0| + \sum_{k=1}^p |a_k| = N(P) \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de l'inégalité.

5. *Montrez que si a et b sont deux éléments de $[0;1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.*

Soient $a, b \in [0;1]$, et $P \in E$. On part de $N_a(P)$ et on essaie d'arriver à une majoration en fonction de$N_b(P)$:

$$\begin{aligned} N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt &\leq |P(a) - P(b)| + |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \\ &\leq |\int_b^a P'(t)dt| + N_b(P) \leq |\int_b^a |P'(t)|dt| + N_b(P) \\ &\leq \int_0^1 |P'(t)|dt + N_b(P) \leq 2N_b(P) \end{aligned}$$

Ici, il faut faire attention au fait que a et b ne sont pas forcément dans le bon ordre (d'où les valeurs absolues autour de l'intégrale tout du long) et utiliser le fait que a et b sont dans $[0;1]$, ce qui implique que $[\min(a;b); \max(a;b)] \subset [0;1]$ et donc la dernière majoration d'intégrales. On a donc une première inégalité, et pour la seconde il suffit de remarquer qu'ici on n'a pas distingué a et b, l'inégalité est donc également vraie dans l'autre sens : $N_b(P) \leq N_a(P)$, donc les deux normes sont équivalentes.

Exercice 3. *Montrer que l'ensemble* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n; 2n+1]$ *est un fermé dans* $\mathbb{R}$.

Ici, on a une union de fermés, mais cette union étant infinie, on ne peut pas appliquer les propriétés usuelles. On considère donc le complémentaire de notre ensemble que nous appellerons F :

$$\complement F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]2n+1; 2n[$$

F était constitué de tous les segments compris entre les entiers pairs et les impairs, son complémentaire est donc constitué des intervalles ouverts compris entre les entiers impairs et les pairs. Ce complémentaire est, lui, une union d'intervalles ouverts, il est donc ouvert (toute union d'ouverts est ouverte). Comme $\complement F$ est ouvert, on en déduit que F est fermé.

Exercice 4 (Questions de cours)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.

1. Donner la défintion d'un endomorphisme de E diagonalisable.

   C'est une application linéaire de E dans E telle qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle la matrice de u est diagonale.

2. Pour un endomorphisme u de E, définir une valeur propre et un vecteur propre.

   Une valeur propre est un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe un vecteur $v \in E$ non nul tel que $u(v) = \lambda v$. Un vecteur propre de u est un vecteur v non nul dans E tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(v) = \lambda v$.

3. Étant donnés un endomorphisme u de E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que λ est une valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) = 0$.

   Nous avons :

$$\begin{aligned}
\det(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) = 0 &\iff u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E \text{ non-bijectif} \\
&\iff u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E \text{ non-injectif (car endomorphisme en dimension finie)} \\
&\iff \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\} \\
&\iff \exists v \in E \setminus \{0\} \text{ tel que } (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(v) = 0 \\
&\iff \exists v \in E \setminus \{0\} \text{ tel que } u(v) - \lambda v = 0 \\
&\iff \exists v \in E \setminus \{0\} \text{ tel que } u(v) = \lambda v \\
&\iff \lambda \text{ est une valeur propre de } u.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de u.

   Calculons le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
P_u(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 3 & 3-X & -1 \\ 2 & 3 & -1-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 0 \\ 3 & 3-X & 2-X \\ 2 & 3 & 2-X \end{vmatrix} \quad (C_3 + C_2 \to C_3) \\
&= (2-X) \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 0 \\ 3 & 3-X & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2-X) \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_2 - L_3 \to L_2) \\
&= (2-X) \begin{vmatrix} 2-X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} \quad \text{(développement / la dernière colonne)} \\
&= (2-X)((2-X)(-X)+1) \\
&= (2-X)(X^2-2X+1) \\
&= -(X-2)(X-1)^2.
\end{aligned}$$

   Les valeurs propres de u sont donc 1 et 2 (avec 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1).

   Beaucoup d'entre vous ont certainement calculé ce polynôme sans chercher aucune simplification préalable. C'est faisable mais plus long car une fois le calcul fait, il faut trouver des racines ou au moins une racine α et ensuite factoriser par $X - \alpha$ d'où un risque supplémentaire d'erreurs. Le mieux est de chercher à faire apparaitre des 0 dans le déterminant comme on l'a fait plus haut en essayant d'obtenir un facteur dans une ligne ou une colonne.

2. Pour chaque valeur propre de u, déterminer une base de l'espace propre associé.

   Notons $E_1 = \ker(u - 1 \cdot \mathrm{Id})$. Ici (comme on travaille avec la base canonique de $\mathbb{R}^3$) on peut l'identifier à $\ker(A - 1 \cdot \mathrm{Id}_3)$. On a :

$$A - \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

   On voit clairement que $\mathrm{rg}(A - \mathrm{Id}_3) \geq 2$ (car par exemple les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires) et comme $E_1 \neq \{0\}$, cela signifie (en utilisant le théorème du rang) que $\mathrm{rg}(A - \mathrm{Id}_3) = 2$. Ainsi E_1 est de dimension 1. Pour en obtenir une base, il suffit de trouver un vecteur non nul de E_1.

   Un vecteur (x, y, z) est dans E_1 si et s. si

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \text{ (car } A \text{ est de rang 2)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4x + y = 0 \text{ (en sommant les deux lignes)} \end{cases}$$

Dans le dernier système, on constate que si $x = 1$ alors $y = -4$ et $z = -5$. Ainsi le vecteur $v_1 = (1, -4, -5)$ appartient à E_1. Ce dernier étant de dimension 1, $\{v_1\}$ en est une base.

Concernant la valeur propre 2 :

$$E_2 = \ker(A - 2\mathrm{Id}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ici encore on voit que la matrice précédente est de rang 2. De plus, ses colonnes satisfont la relation : $0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 = 0$. Ainsi le vecteur $v_2 = (0, 1, 1)$ appartient à E_2 et comme E_2 est de dimension 1, $\{v_2\}$ en est une base.

3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

L'endomorphisme u n'est pas diagonalisable car la multiplicité de la valeur propre 1 est 2 alors que $\dim(E_1) = 1$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E. On suppose f diagonalisable. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres respectives associées. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes.

(i) Id_E, f, $\ldots$, f^{n-1} forment une famille libre de End(E).

(ii) Il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.

(iii) Les valeurs propres de f sont distinctes deux à deux.

Étant donnés $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{K}$ nous rappelons que la matrice

$$V(z_1, \ldots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

appelée matrice de Vandermonde a pour déterminant : $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)$.

1. Soit $x \in E$, s'écrivant $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$, avec $x_i \in \mathbb{K}$.

   (a) Exprimer $f^0(x)$, $f(x)$ et $f^2(x)$ en fonction des b_i puis $f^{j-1}(x)$ pour $j = 1, \ldots, n$.

   $f^0(x) = \mathrm{Id}_E(x) = x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$.
   $f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i b_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i b_i$.
   $f^2(x) = f(f(x)) = f(\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i^2 b_i$.
   Par une récurrence facile (que je vous laisse détailler), on montre que :

$$f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^{j-1} \cdot b_i.$$

(b) On note $M(x) = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice telle que m_{ij} soit la coordonnée selon b_i de $f^{j-1}(x)$.
Donner $\det(M(x))$ en fonction de $\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.

Les colonnes de la matrice $M(x)$ sont les coordonnées de x, $f(x)$, $\dots$, $f^{n-1}(x)$ dans la base $b_1, \dots, b_n$. On obtient donc :

$$M(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1\lambda_1 & x_1\lambda_1^2 & \cdots & x_1\lambda_1^{n-1} \\ x_2 & x_2\lambda_2 & x_2\lambda_2^2 & \cdots & x_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n\lambda_n & x_n\lambda_n^2 & \cdots & x_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On constate que pour chaque ligne L_i, x_i est en facteur. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \det(M(x)) &= x_1 \cdots x_n \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdots x_n \det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)). \end{aligned}$$

2. En déduire l'équivalence : (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

Montrons l'implication (ii)$\Rightarrow$(iii). Soit donc $x \in E$ tel que x, $f(x)$, $\dots$, $f^{n-1}(x)$ forment une base de E. Les colonnes de la matrice $M(x)$ forment donc une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Autrement dit $M(x)$ est de rang n ou encore $\det(M(x)) \neq 0$. Cela implique que $\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \neq 0$. On en déduit que les λ_i sont distincts deux à deux (au vu du rappel donné dans l'énoncé).

Montrons l'implication (iii)$\Rightarrow$(ii). Par hypothèse, $\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \neq 0$. Soit alors $x = b_1 + \cdots + b_n$ (remarquons qu'on peut choisir x quelconque à la seule condition que ses coordonnées dans la base $(b_1, \dots, b_n)$ soient toutes non-nulles). Par 1), $\det(M(x)) = \det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \neq 0$. Ainsi la matrice $M(x)$ est inversible ce qui implique (ii).

3. Montrer que (ii) implique (i) (on pourra raisonner par contraposée).

Supposons que (i) soit faux. Ainsi il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que

$$a_1 \mathrm{Id}_E + a_2 f + \cdots + a_n f^{n-1} = 0.$$

Pour tout $x \in E$, on aura alors :

$$(a_1 \mathrm{Id}_E + a_2 f + \cdots + a_n f^{n-1})(x) = 0(x).$$

ou encore

$$a_1 x + a_2 f(x) + \cdots + a_n f^{n-1}(x) = 0.$$

Donc (ii) est faux. Par contraposée, nous avons l'implication voulue.

4. Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Supposons que (ii) soit faux. Considérer les colonnes de $M(x)$ avec $x = b_1 + \cdots + b_n$ et montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que

$a_0\mathrm{Id}_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} = 0$. Conclure.

On a supposé (ii) faux. Ainsi pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est liée. C'est le cas en particulier pour $x = b_1 + \cdots + b_n$. Pour ce x, $M(x) = V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. L'hypothèse sur la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ implique que les colonnes de $M(x)$ sont liées. Notons $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ les colonnes de la matrice M de sorte que pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ on ait

$$C_i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i \\ \vdots \\ \lambda_n^i \end{pmatrix}.$$

Ces colonnes étant liées, il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i C_i = 0$. Cela donne

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_1^i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons la matrice A de l'énoncé. Les b_i formant une base de vecteurs propres de E, A est la matrice diagonale avec les λ_i sur la diagonale. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \begin{pmatrix} \lambda_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_2^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_n^i \end{pmatrix} \\ &= 0 \text{ (par l'égalité ci-dessus).} \end{aligned}$$

Pour finir, remarquons que la matrice de

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$$

dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$ est $\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$ et que cette matrice est nulle. Donc $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$ est l'endomorphisme nul de E. Ce qui montre que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est liée, i.e. (i) est faux. Par contraposée, on vient de démontrer que (i) implique (ii).