Devoir numéro 3 – Math IV

Mardi 8 avril — Durée : 1h30

Partie Analyse
Correction

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.***

Exercice 1. On considère les fonctions

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z) = \dfrac{1}{2+z^2} \end{array} \quad \text{et } g: \begin{array}{ccl}]-\infty, 1[& \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & g(z) = (1-z)\ln(1-z). \end{array}$$

a. Montrer que f et g sont développables en série entière en 0 et calculer leur développement. On note respectivement $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ les séries entières ainsi obtenues.

<u>*Solution.*</u> *On écrit* $f(z) = \dfrac{1}{2+z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z^2}{2}}$ *ce qui est le cas* $x = -\frac{z^2}{2}$ *dans le developpement de la série géometrique autour de 0* $\left(\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$.

Donc, le developpement en série entière existe et égale

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{2^n}.$$

La fonction $g(z) = (1-z)\ln(1-z)$ *est un produit d'un polynôme et une fonction qui est le cas* $x = -z$ *dans le developpement de logarithme autour de 0* $\left(\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}\right)$.

Donc, le developpement en série entière existe et égale

$$\begin{aligned} g(z) &= (1-z)\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n} \\ &= -z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = -z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{(n-1)n}. \end{aligned}$$

b. Déterminer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

<u>*Solution.*</u> *La série géometrique converge pour* $|x| < 1$ *et diverge pour* $|x| > 1$, *ce qui donne que la série* $\sum a_n z^n$ *converge si* $|-\frac{z^2}{2}| < 1 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{2}$ *et diverge si* $|z| > \sqrt{2}$.

Donc, le rayon de convergence da la série $\sum a_n z^n$ *égale* $\sqrt{2}$.

Pour la deuxième série, on applique le critère d'Alembert aux coefficients à partir de $n = 2$ *et on trouve:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n}{n(n+1)} = 1.$$

Donc, le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$ égale $\frac{1}{1} = 1$.

c. Préciser la nature de la convergence à l'intérieur des disques de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

<u>Solution.</u> *À l'intérieur des disques de convergence la convergence est absolue et elle est uniforme sur chaque disque fermé inclus dans l'intérieur.*

d. Déterminer les points des cercles de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ où ces séries entières convergent.

<u>Solution.</u> *Si $|z| = \sqrt{2}$, alors $|a_{2n}z^{2n}| = |\frac{2^n}{2^n}| = 1$. Donc, la suite correspondante ne tend pas vers 0, alors, la série $\sum a_n z^n$ diverge sur tout le cercle de convergence.*

Si on met $z = 1$ dans la série $\sum b_n z^n$, on obtient $-1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$. Les termes à partir de $n = 2$ sont majorés par la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ qui converge (série de Riemann). Alors, la série $\sum b_n z^n$ converge absolument sur tout le cercle de convergence.

e. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum(a_n + b_n)z^n$.

<u>Solution.</u> *Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières à rayons de convergence différentes est le minimum de deux rayons. x On trouve donc $R = \min(1, \sqrt{2}) = 1$.*

f. Donner un exemple de deux séries entières $\sum c_n z^n$ et $\sum d_n z^n$ de rayons de convergence égaux à 1, mais dont la somme $\sum(c_n + d_n)z^n$ a un rayon de convergence différent de 1.

<u>Solution.</u> *On peut choisir $\sum(a_n + b_n)z^n$ et $\sum(-b_n z^n)$, dont la somme a rayon de convergence $\sqrt{2}$.*

Un autre example sont les deux séries $\sum z^n$ et $\sum(-z^n)$, dont la somme est 0, ce qui a rayon de convergence ∞.

Exercice 2. **a**. Montrer que la fonction $x \mapsto (1-\cos x)/x^2$ admet un prolongement développable en série entière en 0 et calculer son développement.

<u>Solution.</u> *La série entière de $1 - \cos x$ autour de 0 est $\left(-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$. Comme ellee commence avec le terme de x^2, on peut diviser par x^2 et on obtient la série entière*

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}.$$

b. On suppose que l'équation différentielle:

$$(E) \quad x^2y''' + 6xy'' + (x^2+6)y' + 2xy = 0$$

admet une solution développable en série entière en 0. On note $\sum a_n x^n$ ce développement. Déterminer la relation de récurrence satisfaite par les coefficients a_n et calculer ces coefficients.

<u>Solution.</u> *On remplace $y(x)$ par $\sum a_n x^n$ dans (E):*

$$
\begin{aligned}
0 &= x^2 \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)x^{n-3} + 6x \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + (x^2+6)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 6a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 6a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_{n+1}(n+1)n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n-1)x^n \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n
\end{aligned}
$$

Dans ce calcul on a commencé chaque sommation à l'indice le plus petit possible.
Comme certaines sommes commencent à 0 et d'autres à 1, on traite les deux cas séparemment:
Le coefficient de x^0 est $6a_1$. On obtient donc l'équation

$$a_1 = 0.$$

Pour $n > 0$, le coefficient de x^n est

$$
\begin{aligned}
&a_{n+1}(n+1)n(n-1) + 6a_{n+1}(n+1)n + a_{n-1}(n-1) + 6a_{n+1}(n+1) + 2a_{n-1} \\
&\qquad = a_{n+1}(n+1)(n+2)(n+3) + a_{n-1}(n+1).
\end{aligned}
$$

On obtient donc la récurrence

$$a_{n+1} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)} a_{n-1} \quad \forall n > 0.$$

En itérant la récurrence, on trouve donc

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{(2k+3)(2k+2)\cdots 4} a_1 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

et

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k+2)(2k+1)\cdots 3} a_0 = (-1)^k \frac{2}{(2k+2)!} a_0 \forall k \in \mathbb{N}.$$

c. Exprimer les solutions de (E) développables en série entière en 0 à l'aide de fonctions élémentaires.

<u>Solution.</u> *En posant $C = 2a_0$ et en utilisant le résultat de la première partie de cet exercice, on obtient la famille de solutions suivante:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+2)!} = \begin{cases} C\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ a_0 = \frac{C}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$