Corrigé du devoir n° 3, partie Algèbre

Exercice 1.

1. Le polynôme caractéristique de A est, par définition
$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -a & 0 \\ -a & x-1 & -a \\ 0 & -a & x-1 \end{vmatrix} \tag{1}$$
On remarque
$$P_A(1) = \begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ -a & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix}.$$
C'est le déterminant d'une matrice dont deux colonnes (ou lignes) sont identiques, il vaut donc zéro. Ainsi, $P_A(1) = 0$ et 1 est valeur propre de A.
2. 1 est valeur propre de A d'après la question précédente, donc $(x-1)$ divise P_A, et $P_A(x) = (x-1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme. P_A est de degré 3 comme polynôme caractéristique d'une matrice 3×3, donc Q est de degré 2.
Pour déterminer Q on peut développer le déterminant (1) par rapport à la première colonne. Il vient
$$\begin{aligned} P_A(x) &= (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & -a \\ -a & x-1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\left((x-1)^2 - a^2\right) - a^2(x-1) \\ &= (x-1)\left((x-1)^2 - a^2 - a^2\right) \\ &= (x-1)\left((x-1)^2 - 2a^2\right) \end{aligned} \tag{2}$$
donc $Q(x) = (x-1)^2 - 2a^2$.
3. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, il s'agit donc de résoudre l'équation $P_A(x) = 0$. $x = 1$ est solution évidente car $P_A(x) = (x-1)Q(x)$, il reste donc à trouver les solutions de $Q(x) = 0$:
$$\begin{aligned} Q(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2a^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1) = \pm a\sqrt{2} \end{aligned}$$
car $a \geq 0$. Ainsi, $x = 1 + a\sqrt{2}$ ou $x = 1 - a\sqrt{2}$. Ces deux solutions sont distinctes si $a > 0$, mais identiques si $a = 0$. Il faut donc distinguer les cas :
— Si $a = 0$. Alors 1 est racine double de Q, donc racine triple de P. Ainsi, 1 est l'unique valeur propre de A, avec multiplicité 3.
— Si $a > 0$. Alors les racines de P_A sont simples, et on a trois valeurs propres distinctes $1, 1+a\sqrt{2}, 1-a\sqrt{2}$, chacune de multiplicité 1.

Exercice 2.

1. Toutes les colonnes de B à partir de la deuxième sont identiques, donc il n'est pas possible de trouver plus de 2 colonnes linéairement indépendantes. On vérifie facilement que les deux premières le sont, ce qui nous donne $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = 2$.
2. $\forall x \in \ker u$, $u(x) = 0$ donc $v = u|_{\ker u} = 0_{\ker u}$, et $\chi_v(x) = x^p$ avec $p = \dim \ker u$. D'après le théorème du rang, $n = \dim \ker u + \operatorname{rg} u = \dim \ker u + 2$, donc $\dim \ker u = n - 2$. Ainsi, $P_v(x) = x^{n-2}$.
3. $\ker u$ est un sous-espace stable par u, donc v est l'endomorphisme induit sur $\ker u$. D'après le cours, P_v divise P_u et donc $P_u(x) = P_v(x)Q(x)$, où Q est un polynôme. Comme P_u est de degré n et P_v de degré $n-2$, Q est de degré 2.
Alternative : On peut compléter une base de $\ker u$ en une base de $\mathbb{R}^n$, expliciter la matrice de u dans cette base et finalement calculer son polynôme caractéristique.

4. X est vecteur propre de B ssi $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}, BX = \lambda X$. On a

$$
\begin{aligned}
BX &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-1 \text{ fois}} \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha + n - 1 \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

et

$$
\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}
$$

donc X est vecteur propre pour la valeur propre λ si $\lambda = \alpha$ et $\lambda\alpha = \alpha + n - 1$ ce qui donne la condition

$$
\alpha^2 - \alpha - (n-1) = 0, \tag{3}
$$

équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4(n-1) = 4n-3$. Ce discriminant est strictement positif, car $n \geq 3$ d'après l'énoncé. Ainsi, l'équation (3) a deux solutions réelles distinctes

$$
\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2},
$$

et X est vecteur propre de B ssi $\alpha = \alpha_1$ ou $\alpha = \alpha_2$. Les valeurs propres correspondantes sont $\lambda = \alpha_1$ ou $\lambda = \alpha_2$.

5. D'après les questions 1 et 2, $\dim \ker u = n-2$ donc 0 est valeur propre de u avec multiplicité $n-2$. La question 5 nous fournit deux autres valeurs propres distinctes (et différentes de 0, car $\sqrt{4n-3} \geq \sqrt{4 \times 3 - 3} = 3$) dont la multiplicité est au minimum 1.

   Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres doit être inférieure ou égale à n, il ne peut pas y avoir d'autres valeurs propres. Au final, 0 est valeur propre de multiplicité $n-2$, α_1 est valeur propre de multiplicité 1 et α_2 est valeur propre de multiplicité 1.