Partie commune - Devoir numéro 3

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Soient $v_1 = (1, 4, 3, 4)$, $v_2 = (1, 2, 1, 2)$ et $v_3 = (1, 1, 0, 1)$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (v_1, v_2, v_3).

1. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ? Justifier.
2. (a) Déterminer une base échelonnée de F et en déduire la dimension de F.
   (b) Compléter la base de F trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On note $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \text{ et } y = t\}$.
   (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Montrer que $F = G$.

Exercice 2. On note $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1 + \cos x)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi, \pi[$.
2. Vérifier que f est paire et justifier, sans calcul, que $f'(0) = 0$.
3. Calculer f' et f''.
4. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $\ln 2 - \ln(1 + \cos x) \geq \dfrac{x^2}{4}$.

Exercice 3.
1. Calculer les primitives de la fonction rationnelle $F : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)(x^2+2x+2)}$.
   Préciser les intervalles sur lesquels elles sont définies.
2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \tan^2 t}{(\tan t - 2)(\tan^2 t + 2\tan t + 2)} dt$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner une base et la dimension de F.