Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 3 - Corrigé

Exercice 1. Soient $v_1 = (1, 4, 3, 4)$, $v_2 = (1, 2, 1, 2)$ et $v_3 = (1, 1, 0, 1)$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (v_1, v_2, v_3).

1. *La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ? Justifier.*

   On peut remarquer que $v_1 = 3v_2 - 2v_3$, ce qui implique que la famille (v_1, v_2, v_3) est liée. Sinon, l'algorithme de Gauss permet de conclure, et il permet aussi de répondre à la question suivante. Écrivons-le.

   On note A la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2 et v_3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La première étape de l'algorithme de Gauss consiste à remplacer la colonne C_2 par $C_2 - C_1$ et la colonne C_3 par $C_3 - C_1$, on obtient la matrice $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Ensuite, on remplace la colonne C_3 de $A^{(1)}$ par $C_3 - \frac{3}{2}C_2$, ce qui donne $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Notons $v_2' = (0, -2, -2, -2)$. On sait que $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2', 0_{\mathbb{R}^4}) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2')$. Ces deux derniers vecteurs forment une famille échelonnée de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^4$, il sont donc libres : ils forment une base échelonnée de F et F est de dimension 2. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) constituée de trois vecteurs de F est liée.

2. (a) *Déterminer une base échelonnée de F et en déduire la dimension de F.*

   La réponse a été donnée à la question précédente.

   (b) *Compléter la base de F trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.*

   On complète la famille (v_1, v_2') en une famille échelonnée de $\mathbb{R}^4$, qui sera bien une base de $\mathbb{R}^4$. On choisit par exemple les deux derniers vecteurs de la base canonique $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1)$: (v_1, v_2', e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. On note $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \text{ et } y = t\}$.

   (a) *Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

   Soit $u \in \mathbb{R}^4$. On écrit $u = (x, y, z, t)$. On a

$$\begin{aligned} u \in G &\iff x - y + z = 0 \text{ et } y = t \\ &\iff z = y - x \text{ et } y = t \\ &\iff u = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

   On vient de montrer que $G = \mathrm{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 1))$. Ainsi G est un sous-espace vectoriel.

(b) *Montrer que $F = G$.*

Comme les vecteurs $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de G, qui est donc de dimension 2.

De plus, on vérifie que $v_1 \in G$ et $v_2' \in G$ (en vérifiant que leurs coordonnées satisfont les deux relations définissant G). Comme G est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2') \subset G$. Enfin, $\dim F = \dim G = 2$ donc $F = G$.

Exercice 2. On note $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1 + \cos x)$.

1. *Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi, \pi[$.*

   cos est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $\cos x > -1$, donc f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi, \pi[$.

2. *Vérifier que f est paire et justifier, sans calcul, que $f'(0) = 0$.*

   $]-\pi, \pi[$ est un intervalle symétrique par rapport à 0 et comme cos est paire, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

   $$f(-x) = \ln(1 + \cos(-x)) = \ln(1 + \cos x) = f(x).$$

   On en déduit que f' est impaire et que donc $f'(0) = 0$.

3. *Calculer f' et f''.*

   Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{1 + \cos x}$ et

   $$f''(x) = \frac{-\cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{-1 - \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{-1}{1 + \cos x}.$$

4. *Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $\ln 2 - \ln(1 + \cos x) \geq \dfrac{x^2}{4}$.*

   Soit $x \in]0, \pi[$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, x]$, par la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, \pi[$ tel que

   $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2}x^2 = \ln 2 - \frac{1}{2(1 + \cos c)}x^2.$$

   Or, $-1 < \cos c < 1$ donc $0 < 1 + \cos c < 2$ et $-\frac{1}{2(1+\cos c)} < \frac{-1}{2}$ et ainsi,

   $$\ln(1 + \cos x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4}.$$

   Par parité, cette inégalité est encore vraie pour $x \in]-\pi, 0[$. Pour $x = 0$, on a $f(0) = \ln 2 \leq \ln 2 - \frac{0^2}{4}$. On en déduit que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $f(x) \leq \ln 2 - \frac{x^2}{4}$, c'est-à-dire

   $$\ln 2 - \ln(1 + \cos x) \geq \frac{x^2}{4}.$$

Exercice 3. 1. *Calculer les primitives de la fonction rationnelle $F : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)(x^2 + 2x + 2)}$. Préciser les intervalles sur lesquels elles sont définies.*

Le polynôme $X^2 + 2X + 2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, donc la fonction rationnelle F est définie et continue sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur tout intervalle inclus dans

$]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. Pour les calculer, on décompose F en éléments simples. Comme $\deg(X-2) < \deg(X^2+2X+2)$, et comme X^2+2X+2 est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$, il existe trois réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{(X-2)(X^2+2X+2)} = \frac{a}{X-2} + \frac{bX+c}{X^2+2X+2}.$$

On calcule a en multipliant l'égalité par $X-2$ et en évaluant en 2, cela donne $a = \frac{1}{10}$. Ensuite, en évaluant en 0, on obtient $-\frac{1}{4} = -\frac{a}{2} + \frac{c}{2}$, d'où $c = -\frac{2}{5}$. Enfin, on calcule la limite quand $x \to +\infty$ de $xF(x)$, et on obtient $0 = a + b$, d'où $b = -\frac{1}{10}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int F(x)dx &= \frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+2}\right) dx \\
&= \frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{(x+1)^2+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{3}{(x+1)^2+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{10}\ln|x-2| - \frac{1}{20}\ln((x+1)^2+1) - \frac{3}{10}\arctan(x+1) + K,\ K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. *En déduire la valeur de l'intégrale suivante :* $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2 t}{(\tan t - 1)(\tan^2 t + 2\tan t + 2)} dt.$

   On fait le changement de variable $x = \tan t$. La fonction tan est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective (strictement croissante) de $[0, \pi/4]$ dans $[\tan(0), \tan(\pi/4)] = [0, 1]$. On calcule $dx = (1 + \tan^2 t)dt$. On obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)(x^2+2x+2)} dx \\
&= \left[\frac{1}{10}\ln|x-2| - \frac{1}{20}\ln((x+1)^2+1) - \frac{3}{10}\arctan(x+1)\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{20}\ln 5 - \frac{3}{10}\arctan(2) - \frac{1}{10}\ln 2 + \frac{1}{20}\ln 2 + \frac{3}{10}\arctan(1) \\
&= -\frac{1}{20}\ln 5 - \frac{3}{10}\arctan(2) - \frac{1}{20}\ln 2 + \frac{3\pi}{40}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : P(0) = 0\}$.

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.*

   Le polynôme nul est bien dans F.

   Soit $(P, Q) \in F^2$,$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ donc $\lambda P + \mu Q \in F$.

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. *Donner une base et la dimension de F.*

   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe $n+1$ réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$. On a $P(0) = 0$ si et seulement si $a_0 = 0$. On en déduit que $F = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^n)$. Or la famille $(X, \ldots, X^n)$ est une sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ $(1, X, \ldots, X^n)$, elle est donc libre : c'est une base de F. Ainsi, la dimension de F est égale au cardinal de cette famille, qui vaut n.