Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
2. $v_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Exercice 2. On considére le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet espace deux applications : si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$

$$N(P) = \sum_{k=0}^{p} |a_k| \qquad N'(P) = \int_0^1 |P(t)|dt$$

1. Montrer que N et N' définissent des normes sur E.
2. Montrer que pour tout $P \in E$, on a $N'(P) \leq N(P)$, mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.
   Indication : on pourra considérer les polynômes X^n, $n \in \mathbb{N}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application :

$$N_a : \quad E \to \mathbb{R}^+ \quad P \mapsto |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt$$

3. Montrer que N_a définit une norme sur E. *On pourra se contenter de l'axiome de séparation.*
4. Montrer que pour tout $P \in E$, on a :

$$N'(P) \leq N_0(P) \leq N(P)$$

   Indication : pensez à utiliser la formule $P(y) = P(x) + \int_x^y P'(t)dt$.

5. Montrez que si a et b sont deux éléments de $[0; 1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n; 2n + 1]$ est un fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Questions de cours)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.

1. Donner la défintion d'un endomorphisme de E diagonalisable.
2. Pour un endomophisme u de E, définir une valeur propre et un vecteur propre.
3. Étant donnés un endomorphisme u de E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que λ est une valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) = 0$.

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de u.
2. Pour chaque valeur propre de u, déterminer une base de l'espace propre associé.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit f un endomorphisme de E. On suppose f diagonalisable. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres respectives associées. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes.

(i) $\mathrm{Id}_E,\ f,\ \dots,\ f^{n-1}$ forment une famille libre de End(E).

(ii) Il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.

(iii) Les valeurs propres de f sont distinctes deux à deux.

Étant donnés $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}$ nous rappelons que la matrice

$$V(z_1, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

appelée matrice de Vandermonde a pour déterminant : $\displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i)$.

1. Soit $x \in E$, s'écrivant $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$, avec $x_i \in \mathbb{K}$.
   (a) Exprimer $f^0(x)$, $f(x)$ et $f^2(x)$ en fonction des b_i puis $f^{j-1}(x)$ pour $j = 1, \dots, n$.
   (b) On note $M(x) = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice telle que m_{ij} soit la coordonnée selon b_i de $f^{j-1}(x)$.
   Donner $\det(M(x))$ en fonction de $\det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.
2. En déduire l'équivalence : (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).
3. Montrer que (ii) implique (i) (on pourra raisonner par contraposée).
4. Soit A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Supposons que (ii) soit faux. Considérer les colonnes de $M(x)$ avec $x = b_1 + \cdots + b_n$ et montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que $a_0 \mathrm{Id}_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} = 0$. Conclure.