Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1h30

Corrigé du devoir numéro 3 - Partie algèbre

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n. Pour tout $P \in E$, on note $u(P)$ le polynôme

$$u(P)(X) = 2XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X) \ .$$

1. Montrer que u définit un endomorphisme de E.
2. On munit E du produit scalaire défini pour deux polynômes P et Q par

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

   Au moyen d'intégrations par parties, montrer que u est autoadjoint relativement à ce produit scalaire.
3. u est-il diagonalisable ?

Réponse :

1. L'application $P \mapsto u(P)$ est $\mathbb{R}$-linéaire : en effet pour tous polynômes P, Q et tous scalaires λ, μ on obtient aisément $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$. Ensuite si P est de degré $\leq n$, sa dérivée première P' est de degré $\leq n-1$ et sa dérivée seconde P'' est de degré $\leq n-2$; le polynôme $u(P)$ est donc lui aussi de degré $\leq n$, et u définit un endomorphisme de E.

2. Tout d'abord il est utile de remarquer que le polynôme $u(P) = 2XP' + (X^2-1)P''$ est la dérivée de $(X^2-1)P'$. Ceci étant on calcule, pour tous P, Q dans E :

$$\begin{aligned}
\langle u(P), Q \rangle &= \int_{-1}^{1} \big((t^2-1)P'(t)\big)'Q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\Big[(t^2-1)P'(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1}} - \int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \qquad 0 \qquad - \int_{-1}^{1} P'(t)(t^2-1)Q'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\underbrace{\Big[P(t)(t^2-1)Q'(t)\Big]_{-1}^{1}} + \int_{-1}^{1} P(t)\big((t^2-1)Q'(t)\big)'\,\mathrm{d}t \\
&= \qquad 0 \qquad + \langle P, u(Q) \rangle
\end{aligned}$$

ce qui montre que u est autoadjoint.

3. D'après le théorème spectral, tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien est diagonalisable (et même, dans une base orthonormée), donc u est diagonalisable.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = S_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices $n \times n$ symétriques, muni du produit scalaire défini pour deux matrices A et B par

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(AB) \ .$$

1. On note F le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques *de trace nulle*. Déterminer les dimensions de E et F, puis montrer que E se décompose en somme directe orthogonale

$$E = \operatorname{Vect}(I_n) \oplus F$$

   où I_n désigne la matrice identité de taille n.

2. Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. A toute matrice symétrique $A \in E$, on associe la matrice

$$\Phi_U(A) = UAU^{-1} \ .$$

   Montrer que Φ_U définit un endomorphisme orthogonal de E (on prendra soin de montrer au préalable que Φ_U est bien un endomorphisme de E), et que les sous-espaces $\operatorname{Vect}(I_n)$ et F sont stables par Φ_U.

3. Application : dans cette question on fixe $n = 2$, avec une matrice U de la forme

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} , \qquad \theta \in \mathbb{R} \ .$$

   Construire une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E telle que e_1 soit colinéaire à I_2, puis calculer la matrice de Φ_U dans cette base. En déduire que Φ_U est une rotation dont on précisera l'axe, ainsi qu'un angle au signe près.

Réponse :

1. Notons T l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures. On considère l'application $t : E \to T$ qui à toute matrice symétrique A associe sa sous-matrice triangulaire supérieure (c'est-à-dire, on remplace les coefficients de A situés strictement en-dessous de la diagonale par 0). Cette application est linéaire. De plus elle est injective : si $t(A) = 0$, alors $A = 0$ aussi car ses coefficients situés en-dessous de la diagonale se déduisent de ceux situés au-dessus. Et enfin, t est surjective : toute matrice triangulaire supérieure peut se compléter en une matrice symétrique. Donc t est un isomorphisme, et E a la même dimension que T. On peut prendre comme base de T l'ensemble des matrices élémentaires dont le coefficient non-nul est situé au-dessus (au sens large) de la diagonale. Donc

$$\dim E = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Ensuite on remarque que le sous-espace F est le noyau de l'application linéaire $\operatorname{Tr} : E \to \mathbb{R}$. Comme la matrice identité $I_n \in E$ a une trace non-nulle, l'image de Tr est de dimension 1. Le théorème du rang implique

$$\dim F = \dim E - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \ ,$$

et F est un hyperplan de E. Puisque $I_n \notin F$, on en déduit que $\operatorname{Vect}(I_n)$ et F sont des sous-espaces supplémentaires dans E. Il reste à montrer qu'ils sont orthogonaux. Pour tout $A \in F$, on a

$$\langle I_n, A \rangle = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(I_n A) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(A) = 0$$

ce qui montre que $E = \operatorname{Vect}(I_n) \oplus F$ est bien une somme directe orthogonale.

2. On remarque d'abord que l'application $\Phi_U : E \to M_n(\mathbb{R}),\ A \mapsto UAU^{-1}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Ensuite, la matrice U est orthogonale donc $U^{-1} = {}^tU$, et pour toute matrice symétrique $A \in E$ l'on a

$$^t(\Phi_U(A)) = {}^t(UA{}^tU) = {}^{tt}U{}^tA{}^tU = UA{}^tU = \Phi_U(A)$$

ce qui montre que la matrice $\Phi_U(A)$ est symétrique donc Φ_U est bien un endomorphisme de E. Maintenant pour toutes matrices $A, B \in E$,

$$\langle \Phi_U(A), \Phi_U(B)\rangle = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(UA{}^tUUB{}^tU) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(A{}^tUUB{}^tUU) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(AB) = \langle A, B\rangle$$

donc Φ_U est orthogonal. Ensuite, $\Phi_U(I_n) = UI_n{}^tU = U{}^tU = I_n$ donc Φ_U agit par l'endomorphisme identité sur le sous-espace $\mathrm{Vect}(I_n)$, qui est donc stable. On en déduit que son sous-espace orthogonal, F, est lui aussi stable par Φ_U (on peut le vérifier directement en remarquant que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $\mathrm{Tr}(\Phi_U(A)) = \mathrm{Tr}(UA{}^tU) = \mathrm{Tr}(A) = 0$).

3. Pour $n = 2$ on a $\dim E = 3$ et $\dim F = 2$. Calculons

$$||I_2||^2 = \langle I_2, I_2\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(I_2) = 1$$

donc $e_1 = I_2$ est un vecteur unitaire qui engendre $\mathrm{Vect}(I_2)$. Il faut le compléter par une base orthonormée $\{e_2, e_3\}$ de F. Pour ce faire, on commence par noter que les deux matrices symétriques-de-trace-nulle suivantes

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes, donc forment une base de F puisque cet espace est de dimension 2. On applique ensuite le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{v_2, v_3\}$. Ici on a de la chance, car $||v_2|| = 1$, $||v_3|| = 1$ et $\langle v_2, v_3\rangle = 0$: on peut donc prendre simplement $e_2 = v_2$ et $e_3 = v_3$ (si par malchance on avait choisi pour $\{v_2, v_3\}$ une base non orthonormée, les calculs auraient été un peu plus longs mais il est toujours possible d'appliquer Gram-Schmidt à une base de cardinal 2 !). Il reste à calculer l'action de Φ_U sur ces vecteurs. On sait déjà que $\Phi_U(e_1) = e_1$. Ensuite

$$\begin{aligned} \Phi_U(e_2) &= Ue_2{}^tU = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= (\cos 2\theta)e_2 + (\sin 2\theta)e_3\ , \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \Phi_U(e_3) &= Ue_3{}^tU = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} \\ &= (-\sin 2\theta)e_2 + (\cos 2\theta)e_3\ . \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de Φ_U dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ s'écrit

$$\mathrm{Mat}(\Phi_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\ .$$

Φ_U est donc une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(I_2)$ et d'angle 2θ (le signe de l'angle dépend du choix des vecteurs e_2 et e_3 : par exemple une permutation de ces deux vecteurs transformerait 2θ en son opposé -2θ. Par contre la valeur absolue de cet angle est indépendante de la base orthonormée choisie).