Partie CCP - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Exercice 1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

1. **Sans utiliser** les séries de Bertrand, étudier la convergence absolue de $\sum u_n$.
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Comment appelle-t-on ce type de série ?
3. Dans la suite, on appelle S la somme de la série, S_n la somme partielle d'ordre n et R_n le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
   (a) Montrer l'inégalité $\ln x \leq 2\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 1$.
   (b) À l'aide des questions précédentes, déterminer un entier n le plus petit possible qui vérifie l'inégalité $|R_n| \leq 10^{-3}$?
   (c) En déduire une valeur de n telle que S_n soit une valeur approchée de S à 10^{-3} près. Est-ce une valeur approchée par défaut ou par excès ?

Problème 1. NORMES ÉQUIVALENTES

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose, pour $f \in E$,

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2\,|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $\|\,.\,\|$ définit une norme sur E.
   On **admet** de même que $\|\,.\,\|'$ est aussi une norme sur E.
2. (a) Rappeler la définition de deux normes équivalentes sur E.
   (b) Démontrer que les deux normes $\|\,.\,\|$ et $\|\,.\,\|'$ sont équivalentes sur E.
3. (a) Rappeler la définition usuelle de la norme $\|\,.\,\|_\infty$ sur E.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \in [0;1] \longmapsto \sin(n\pi t)$. Calculer la norme infinie $\|f_n\|_\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\|f_n\| = 4n$.
   (d) En déduire que toutes les normes sur E ne sont pas équivalentes à $\|\,.\,\|$.
   (e) Que peut-on en conclure sur la dimension de E ?
4. On pose $X = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
   (a) i. Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et $g \in E$. Rappeler la définition de la convergence de la suite $(g_n)_n$ vers la fonction g pour la norme $\|\,.\,\|$.
   ii. Démontrer que l'ensemble X est un fermé de E pour la norme $\|\,.\,\|$.

(b) On rappelle que l'on peut munir l'espace vectoriel E de la norme $\| \,.\, \|_1$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t.$$

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $h_n : t \in [0;1] \longmapsto 1 - e^{-nt}$. On note $\widetilde{1}$ la fonction constante égale à 1 sur $[0;1]$. Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\widetilde{1}$ au sens de la norme $\| \,.\, \|_1$.

ii. En déduire que X n'est pas un fermé de E pour la norme $\| \,.\, \|_1$.

iii. Que peut-on en conclure sur les normes $\| \,.\, \|$ et $\| \,.\, \|_1$?

Correction du Devoir Surveillé 3 - partie CCP

1. Le terme général est défini pour tout $n \geq 1$. De plus, pour tout $n \geq 3$, on a $|u_n| \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 donc divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, il s'ensuit que $\sum |u_n|$ diverge, ce qui montre que $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est alternée car $(-1)^n u_n = \dfrac{\ln n}{n} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et son module converge vers 0 par croissance comparée. Montrons que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, au moins à partir d'un certain rang. Pour cela, on introduit la fonction $f : x \in [1;+\infty[\longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$. La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$, de dérivée $f' : x \in [1;+\infty[\longmapsto \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ qui est positive sur $[1;e]$ et négative sur $[e;+\infty[$. Par conséquent, f est décroissante sur $[e;+\infty[$, ce qui permet d'affirmer que la suite $(|u_n|)_{n\geq 1} = (f(n))_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $n = 3$.

   Le critère des séries alternées montre que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ converge.

3. (a) On pose la fonction $h : x \in [1;+\infty[\longmapsto \ln x - 2\sqrt{x}$. La fonction h est dérivable sur $[1;+\infty[$ de dérivée $h' : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ négative sur $[1;+\infty[$. On en déduit la décroissance de h sur $[1;+\infty[$. Comme de plus $h(1) = -2 < 0$, il s'ensuit que h est toujours à valeurs négatives, ce qui donne directement l'inégalité demandée.

   On aurait aussi pu se servir du fait que ln est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ pour écrire, pour tout $x \geq 1$,

$$\ln(x) = \ln(x) - \ln(1) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}.$$

   (b) Comme la série de terme général u_n vérifie le critère spécial des séries alternées à partir du rang $n = 3$, le reste d'ordre n de cette série vérifie pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq |u_{n+1}| \\ &\leq \frac{\ln(n+1)}{n+1} \end{aligned}$$

   On cherche le plus petit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $|R_n| \leq 10^{-3}$, soit $\dfrac{n+1}{\ln(n+1)} \geq 1000$. On ne sait pas résoudre ce type d'inéquation, on cherche donc à utiliser la question précédente. Comme $\ln(n+1) \leq 2\sqrt{n+1}$, on a donc $\dfrac{n+1}{\ln(n+1)} \geq 2\sqrt{n+1}$. Ainsi, si $2\sqrt{n+1} \geq 1000$, c'est-à-dire si $n \geq 25 \times 10^4 - 1$, alors $\dfrac{n+1}{\ln(n+1)} \geq 2\sqrt{n+1} \geq 1000$. Avec seulement les questions précédentes, le plus petit entier n permettant d'obtenir l'inégalité $|R_n| \leq 10^{-3}$ est donné par $n_0 = 25 \times 10^4 - 1$.

   (c) Pour tout $n \geq 1$, $S - S_n$ est égal à R_n. Ainsi, d'après la question précédente, S_{n_0} est une valeur approchée de S à 10^{-3} près. De plus, si $R_{n_0} \leq 0$, la valeur approchée de S donnée S_{n_0} est une valeur par excès et si $R_{n_0} \geq 0$, c'est une valeur approchée par défaut. Or d'après le théorème des séries alternées (puisque $n_0 \geq 3$), on sait que R_{n_0} est du signe de $u_{n_0+1} = u_{25\times 10^4}$. Puisque $n_0 + 1$ est pair, on en déduit que $R_{n_0} \geq 0$, ce qui démontre que S_{n_0} est une valeur approchée de S par défaut.

Correction du problème :

1. Tout d'abord, pour $f \in E$, la fonction f' est continue sur $[0;1]$, donc intégrable. Il s'ensuit que $\|\,.\,\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie.

• Soit $f \in E$ telle que $\|f\| = 0$, alors $|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t = 0$. Les deux termes intervenant étant positifs, cela entraîne $|f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t = 0$. Puisque f' est **continue**, **positive**, **d'intégrale nulle** sur $[0;1]$, on obtient alors

$$\begin{aligned} & f(0) = 0 \text{ et } \forall t \in [0;1], \quad f'(t) = 0 \\ \iff\ & f(0) = 0 \text{ et } f \text{ est constante sur } [0;1] \\ \iff\ & f(t) = 0 \forall t \in [0;1] \\ \iff\ & f = 0_E (\text{ i.e. } f \text{ est la fonction nulle sur } [0;1]) \end{aligned}$$

Réciproquement, si $f = 0_E$, on a directement $\|f\| = 0$, ce qui démontre l'axiome de séparation.

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, alors par linéarité de l'intégrale et homogénéité de la valeur absolue,

$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + 2\int_0^1 |\lambda f'(t)|\ \mathrm{d}t = |\lambda|\,\|f\|.$$

• Soient $f, g \in E$, toujours par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire de la valeur absolue,

$$\|f+g\| = |f(0)+g(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)+g'(t)|\ \mathrm{d}t \leq |f(0)| + |g(0)| + 2\left(\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t + \int_0^1 |g'(t)|\ \mathrm{d}t\right) = \|f\| + \|g\|.$$

Ainsi, $\|\,.\,\|$ est une norme sur E.

2. (a) Soient N et N' deux normes sur E. N et N' sont équivalentes si et seulement si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\forall f \in E$, $\alpha N(f) \leq N'(f) \leq \beta N(f)$.

   (b) Soit $f \in E$. On a d'une part

   $$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t \leq 4\,|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t = 2\|f\|',$$

   et d'autre part

   $$\|f\|' = 2\,|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t \leq 2\,|f(0)| + 4\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t = 2\|f\|.$$

   On a donc démontre que pour tout $f \in E$, $\frac{1}{2}\|f\| \leq \|f\|' \leq 2\|f\|$, ce qui prouve que les normes $\|\,.\,\|$ et $\|\,.\,\|'$ sont équivalentes.

3. (a) Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)|$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque pour tout $t \in [0;1]$, $|f_n(t)| = |\sin(n\pi t)| \leq 1$, on sait déjà que $\|f_n\|_\infty \leq 1$. On peut remarquer que la fonction f_0 est en réalité la fonction nulle, donc $\|f_0\|_\infty = 0$. Montrons que cette norme vaut 1 si $n \neq 0$. Puisque $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{1}{2n} \leq 1$, d'où la minoration

   $$\|f_n\|_\infty \geq \left|f_n\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$$

   ce qui démontre par double inégalité que $\|f_n\|_\infty = 1$ si $n \geq 1$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons la norme $\|f_n\|$:

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= |f_n(0)| + 2\int_0^1 |f_n'(t)| \, \mathrm{d}t \\
&= 0 + 2\int_0^1 |n\pi\cos(n\pi t)| \, \mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{n\pi} |\cos(u)| \, \mathrm{d}u \text{ par changement de variable } u = n\pi t \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(u)| \, \mathrm{d}u \text{ par Chasles} \\
&= 2n\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(u)| \, \mathrm{d}u \text{ par } \pi\text{-périodicité de } u \longmapsto |\cos(u)| \\
&= 2n\left[\sin(u)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 4n.
\end{aligned}$$

(d) Supposons par l'absurde que les normes $\|\,.\,\|$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont équivalentes. Alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha\|\,.\,\| \leq \|\,.\,\|_\infty \leq \beta\|\,.\,\|$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$4\alpha n = \alpha\|f_n\| \leq \|f_n\|_\infty = 1 \leq \beta\|f_n\| = 4\beta n.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, cela donne la contradiction $+\infty \leq 1$. Par suite, $\|\,.\,\|$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, et ainsi toutes les normes sur E ne sont pas équivalentes.

(e) Comme dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, cela entraîne que E est de dimension infinie.

4. (a) i. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers $g \in E$ pour la norme $\|\,.\,\|$ si et seulement si $\|g_n - g\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui équivaut encore à :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|g_n - g\| \leq \varepsilon.$$

ii. On utilise la caractérisation séquentielle des fermés pour montrer que X est un fermé de E pour la norme $\|\,.\,\|$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers $g \in E$. Alors on a en particulier :

$$0 \leq |g_n(0) - g(0)| \leq \|g_n - g\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que la suite réelle $(g_n(0))_n$ converge vers $g(0)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $g_n \in X$, on a $g_n(0) = 0$, ce qui prouve que $g(0) = 0$ en faisant tendre n vers $+\infty$. Par suite, $g \in X$, donc X est fermé pour la norme $\|\,.\,\|$.

(b) i. Tout d'abord, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc appartient à

E. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\|h_n - \widetilde{1}\|_1 &= \int_0^1 \left| h_n(t) - \widetilde{1}(t) \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left| 1 - e^{-nt} - 1 \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 e^{-nt} \, \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{e^{-nt}}{n} \right]_0^1 \\
&= -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \\
& \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

par croissance comparée, ce qui prouve la convergence de $(h_n)_{n \geq 1}$ vers la fonction $\widetilde{1}$ pour la norme $\| \, . \, \|_1$.

ii. Pour tout $n \geq 1$, $h_n \in E$ et vérifie $h_n(0) = 1 - e^0 = 0$, donc $h_n \in X$. La suite $(h_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'éléments de X qui converge vers $\widetilde{1}$ pour la norme $\| \, . \, \|_1$, avec $\widetilde{1}(0) = 1 \neq 0$, ce qui montre que $\widetilde{1} \notin X$. Par conséquent, X n'est pas un fermé pour $\| \, . \, \|_1$.

iii. Puisque X est fermé pour la norme $\| \, . \, \|$, mais ne l'est pas pour $\| \, . \, \|_1$, on en conclut que les normes $\| \, . \, \|$ et $\| \, . \, \|_1$ ne sont pas équivalentes puisque les notions d'ouverts et fermés sont invariantes pour des normes équivalentes.