Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2016-2017

Mathématiques III PMI — 14 novembre 2016. Durée : 1 h 30

Devoir n° 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle. Les exercices sont indépendants.**

Partie Analyse

Exercice 1. Montrer que si $a < b$ sont deux nombres réels, alors l'intervalle $]a, b[$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Solution : Il suffit de montrer que si $x \in]a, b[$ alors il est entouré d'un intervalle ouvert qui est inclus dans $]a, b[$. Pour ce faire, il suffit de poser $\epsilon = \min(x - a, b - x)$. Comme $\epsilon \leq x - a$, on a $x - \epsilon \geq a$. Comme $\epsilon \leq b - x$, on a $x + \epsilon \leq b$. Alors, $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset]a, b[$.

Exercice 2. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y^2)}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} \quad .$$

Solution : Pour la première limite on explicite deux chemins différents avec limites différentes quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Poser $x = y - y^2$ et $x = y + y^2$ donne -1 et 1 respectivement pour limite. Par conséquent, il n'y a pas de limite en $(0, 0)$.

Pour la deuxième, on peut se servir des développements limités pour vérifier que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1 + xy^2 + o(xy^2)) - 1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 \ .$$

La dernière égalité peut se vérifier en posant $x = r\cos(t)$ et $y = r\sin(t)$.

Exercice 3. On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f \ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} y^3 & \text{si } y > x+1 \\ x^3 & \text{si } y \leq x+1 \end{array} \right. \end{array}$$

Etudier la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(a, a+1)$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, sur tout ouvert contenant le point $(a, a+1)$ la fonction a deux définitions différentes selon si $y > x+1$ ou $y < x+1$. Alors, on calcule deux limites : $\lim_{(x,y)\to(a,a+1), y>x+1} f(x, y) = (a+1)^3$ et $\lim_{(x,y)\to(a,a+1), y<x+1} f(x, y) = a^3$. Pour assurer la continuité en $(a, a+1)$ il faut que $a^3 = (a+1)^3$. Or cette égalité équivaut à ce que $3a^2+3a+1 = 0$. Comme ce dernier polynôme n'a pas de racine réelle, on conclut que la fonction n'est pas continue aux points $(a, a+1)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(t,t)|t \in \mathbb{R}\}$ de la manière suivante :

$$g(x,y) \;=\; \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\;.$$

Etudier, en justifiant votre travail, à quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction g se prolonge par continuité ? (Indication : vous pouvez vous servir du théorème des valeurs intermédiaires.)

Solution : Aux points de coordonnées différentes la fonction est continue par sa définition qui compose f avec des fonctions simples qui sont continues dès qu'elles sont définies. Étudions si g se prolonge par continuité aux points de coordonées (a,a) où $a \in \mathbb{R}$. En un point (x,y) de coordonnées différentes, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une valeur $\mathrm{c}(x,y)$ entre x et y telle que $f'(\mathrm{c}(x,y)) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Les gendarmes pointent dans la direction de a comme valeur limite de $\mathrm{c}(x,y)$ quand $(x,y) \to (a,a)$. Comme f est supposée continûment dérivable, $\lim_{(x,y)\to(a,a)}(f'(\mathrm{c}(x,y))) = f'(a)$. En définissant $g(a,a) = f'(a)$, on obtient le prolongement à $\mathbb{R}^2$ en tous les points qui ne sont pas dans le domaine initial de g.

Partie Algèbre

Exercice 5. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par f sont les sous-espaces $\{0\}$ et E.

1. L'endomorphisme f possède-t-il des valeurs propres ?

   Solution : si x est vecteur propre de f alors $D = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par f. Ceci contredit l'hypothèse car D est un sous-espace vectoriel non nul distinct de E. On en déduit que f ne possède pas de valeurs propres.

2. Soit x un vecteur non nul de E. On note $B = \{p \in \mathbb{N}^* \mid (x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre}\}$.

   a) On note m le plus grand élément de B. Montrer que $f^m(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$.

   b) Montrer que $\mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ est stable par f.

   Solution : par définition de m, $(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x), f^m(x))$ est liée et donc $f^m(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$. Si $y = a_0x + a_1f(x) + \cdots + a_{m-1}f^{m-1}(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ alors $f(y) = a_0f(x) + a_1f^2(x) + \cdots + a_{m-1}f^m(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$. Ceci implique que le sous-espace $\mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ est stable par f.

   c) Montrer que $\mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x)) = E$.

   d) En déduire que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

   Solution : comme $x \neq 0$, $\mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ est non nul et stable, donc par l'hypothèse initiale coïncide avec E. On en déduit que $m = n$ et que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Exercice 6. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.

   b) En déduire que le spectre de u est $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 2\}$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

   Solution : $\chi_A = (X+1)(X-2)(X^2-2X+2)$, ses racines sont -1 et 2, donc Sp$(u) = \{-1, 2\}$. Le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable.

2. Déterminer les deux sous-espaces propres E_{-1} et E_2. (On explicitera une base de chacun d'eux).

3. On note F le sous-espace $E_{-1} + E_2$ de $\mathbb{R}^4$.

   Solution : $E_{-1} = \mathrm{Vect}(0, 0, 1, 0)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(1, 1, 0, 1)$.

   a) Quelle est la dimension de F ?

   b) Montrer que F est stable par u.

   c) On note u_F la restriction de u à F. Montrer que $\chi_{u_F} = (X+1)(X-2)$.

   Solution : espaces propres correspondants à valeurs propres distincts sont disjoints, donc la dimension de F est 2. On pourra aussi remarquer que les deux vecteurs propres ci-dessus ne sont pas colinéaires et forment une base de F. Les sous-espaces E_{-1} et E_2 sont stables donc aussi leur somme l'est. La matrice de u_F dans la base $((0,0,1,0),(1,1,0,1))$ de F est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il s'en suit que $\chi_{u_F} = (X+1)(X-2)$.

4. On note G le sous-espace $\mathrm{Ker}(u^2 - 2u + 2\mathrm{id})$.

   a) On note $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ le premier vecteur de la base canonique. Calculer $u^2(e_1)$ puis vérifier que $e_1 \in G$.

   Solution : en calculant seulement le premier vecteur colonne de la matrice A^2 ($(0, -2, 0, 2)$ ce qui fournit les coordonnées du vecteur $u^2(e_1)$) on en déduit que $u^2(e_1) = -2e_2 + 2e_4$. Or $(u^2 - 2u + 2id)(e_1) = (-2e_2 + 2e_4) - 2(e_1 - e_2 + e_4) + 2(e_1) = 0$. Donc $e_1 \in G$.

b) Montrer que G est stable par u. Dans ce qui suit, on note u_G la restriction de u à G.

Solution : soit $y \in G$, alors $(u^2 - 2u + 2id)(y) = 0$. On a que $(u^2 - 2u + 2id)(u(y)) = u(u^2 - 2u + 2id)(y) = u(0) = 0$, donc on a bien que $u(y) \in G$, ce qui implique que G est stable.

c) Justifier que χ_{u_G} divise χ_u et que χ_{u_G} est de degré supérieur ou égal à 1.

Solution : comme G est stable par u alors χ_{u_G} divise χ_u. Par le point précédent la dimension de G est supérieur ou égal à 1, ainsi aussi le degré de χ_{u_G}.

d) Montrer que u_G n'a aucun vecteur propre.

Solution : s'il existe $x \neq 0$ dans G tel que $u_G(x) = \lambda x$, alors $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc u_G n'a aucun vecteur propre.

e) Montrer que $\chi_{u_G} = (X^2 - 2X + 2)$.

Solution : Du point 1a) on a que le seul diviseur possible de χ_u de degré supérieur ou égal à 1 sans racines réelles est $(X^2 - 2X + 2)$.

5. Dans cette partie on considère A comme matrice complexe. Factoriser le polynôme caractéristique de A sur $\mathbb{C}$. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

   Solution : $\chi_A = (X+1)(X-2)(X^2 - 2X + 2) = (X+1)(X-2)(X-1-i)(X-1+i)$ a quatre racines complexes distinctes, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.