Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Mathématiques en cursus préparatoires, $2^{\text{ème}}$ année

---

Partie commune - Correction du devoir n° 3

Partie analyse

Exercice 1. On désigne par l^∞ l'espace vectoriel des suites bornées de nombres réels. Soit $k \geq 0$ fixé. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de l^∞, on pose

$$N_\infty(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

et

$$N_{\infty,k}(x) = \sum_{i=0}^{k} |x_i| + \sup_{n\geq k+1} |x_n|.$$

1. *Montrer que N_∞ et $N_{\infty,k}$ sont des normes sur l^∞.*

   Il faut reprendre la définition d'une norme. Nous le décrivons seulement pour la première norme, N_∞.

   - Soit $x \in l^\infty$, si $N_\infty(x) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$ donc $x = 0$. Bien entendu, si $x = 0$ on a $N_\infty(x) = 0$.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in l^\infty$, $N_\infty(\lambda x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda x_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |\lambda| N_\infty(x)$.
   - Enfin, pour tout $x, y \in l^\infty$,

   $$N_\infty(x+y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = N_\infty(x) + N_\infty(y).$$

   Ceci car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$ et le supremum d'une somme est inférieur à la somme des suprema.

2. *Montrer qu'elles sont équivalentes.*

   Pour tout $x \in l^\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq N_\infty(x)$ ainsi (attention il y a $k+1$ termes)

   $$\sum_{i=0}^{k} |x_i| \leq (k+1) N_\infty(x).$$

   De plus $\sup_{n\geq k+1} |x_n| \leq N_\infty(x)$ puisque l'on prend le supremum sur un ensemble d'indices plus petit, au final on a montré que

   $$N_{\infty,k}(x) \leq (k+2) N_\infty(x).$$

   Réciproquement, pour tout $x \in l^\infty$,

   $$N_\infty(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \max\{\max_{1\leq i\leq k} |x_i|, \sup_{n\geq k+1} |x_n|\} \leq \max_{1\leq i\leq k} |x_i| + \sup_{n\geq k+1} |x_n| \leq \sum_{i=0}^{k} |x_i| + \sup_{n\geq k+1} |x_n| = N_{\infty,k}(x).$$

   Les deux normes sont donc équivalentes.

Exercice 2. *Métrique S.N.C.F. Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On fixe un point $p \in \mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on pose :*

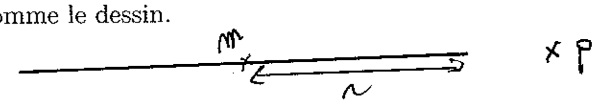
$$D(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{si} \quad x,y,p \quad \textit{sont alignés} \\ d(x,p) + d(y,p) & \text{si} \quad x,y,p \quad \textit{ne le sont pas} \end{cases}$$

1. *Prouver que D est une distance sur $\mathbb{R}^2$.* Il faut reprendre la définition d'une distance.
   - Puisque la distance d est symétrique, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ on $D(x,y) = D(y,x)$.

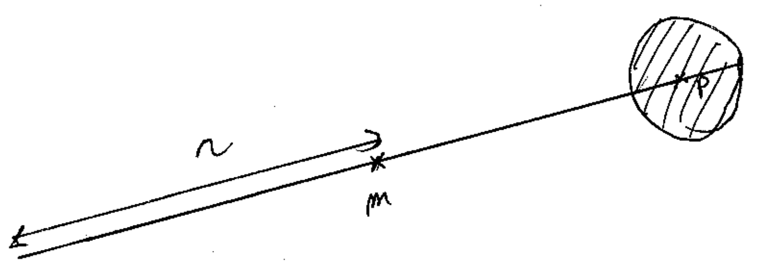
- Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$, si $D(x,y) = 0$ alors, si x, y et p sont alignés on a $d(x,y) = 0$ et donc $x = y$. Si ils ne sont pas alignés alors $d(x,p) + d(y,p) = 0$ ce qui implique alors $x = y = p$. En qui n'est pas possible car alors les points sont alignés. De toute façon on a $x = y$. Bien entendu, si $x = y$ alors, x, y et p sont alignés et donc $D(x,y) = 0$.
- Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. On cherche à montrer l'inégalité triangulaire.
  - Si x, y, z et p sont alignés alors $D(x,y) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x)$. Puisque les points sont alignés on a $d(x,z) = D(x,z)$ et $d(z,x) = D(z,x)$ et donc
  $$D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y).$$
  - Si x, y, p sont alignés et z, x, p et z, y, p ne sont pas alignés alors $D(x,y) = d(x,y)$, $D(x,z) = d(x,p) + d(p,z)$ et $D(y,z) = d(y,p) + d(p,z)$. En utilisant l'inégalité triangulaire $d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,z) + d(z,p) + d(p,y)$ on a bien
  $$D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y).$$
  - Si x, y, p ne sont pas alignés et y, z et p sont alignés on a $D(x,y) = d(x,p) + d(p,y)$, $D(x,z) = d(x,p) + d(p,z)$ et $D(z,y) = d(y,z)$. L'inégalité triangulaire $d(p,y) \leq d(p,z) + d(z,y)$ et on obtient
  $$D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y).$$
  - Enfin si personne n'est alignés avec p on a $D(x,y) = d(x,p) + d(p,y)$, $D(x,z) = d(x,p) + d(p,z)$ et $D(z,y) = d(y,p) + d(p,z)$. On a directement
  $$D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y).$$

D est donc une distance sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Soit $r > 0$. Dessiner la boule $B(p,r)$ pour cette distance D.*
   Soit $r > 0$, si $x \in B(p,r)$ alors $D(x,p) < r$. Mais x et p sont toujours alignés, donc $D(x,p) = d(x,p)$. Ainsi $x \in B(p,r)$ si et seulement si $d(x,p) < r$. Donc $B(p,r)$ est la boule euclidienne ouverte de centre p et de rayon r.
3. *Soit $m \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Dessiner la boule $B(m,r)$ (distinguer suivant que $r \leq d(p,m)$ ou non).*
   Supposons que $r \leq d(p,m)$. Soit $x \in B(m,r)$, si x, m et p sont alignés alors $B(m,x) = d(m,x)$. Il faut dans ce cas que $d(m,x) < r$. Si maintenant ils ne sont pas alignés, $B(m,x) = d(m,p) + d(p,x)$. Il faut dans ce cas que $d(m,p) + d(p,x) < r$, ce qui est impossible car $r \leq d(p,m)$. Donc dans ce cas $B(m,r)$ est l'intervalle centré en m et de longueur r dirigé vers p, comme le dessin.



   Supposons que $r \geq d(p,m)$. Soit $x \in B(m,r)$, si x, m et p sont alignés alors $B(m,x) = d(m,x)$. Il faut dans ce cas que $d(m,x) < r$. On retrouve le cas précédent. Si maintenant ils ne sont pas alignés, $B(m,x) = d(m,p) + d(p,x)$. Il faut dans ce cas que $d(m,p) + d(p,x) < r$, ainsi $d(x,p) \leq r - d(m,p)$. Dans ce cas, x est dans la boule euclidienne centrée en p et de rayon $r - d(m,p)$. Donc $B(m,r)$ est l'intervalle centré en m et de longueur r dirigé vers p plus une boule euclidienne centré p et de rayon $r - d(m,p)$ comme le dessin.



Exercice 3. *Soit $C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles dérivables à dérivée continue sur $[0,1]$. On pose, pour toute fonction $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$,*

$$N(f) = \int_0^1 (|f(x) - f'(x)|)dx.$$

L'application N, définit-elle une norme sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$?

L'application n'est pas une norme car l'application $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = e^x$ et bien dans l'espace $C^1([0,1],\mathbb{R})$ et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$. Elle n'est pas nulle et pourtant $N(f) = 0$.

Partie algèbre

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ avec $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (0,1,0)$ et $b_3 = (0,1,1)$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de u.

   On voit que $\mathrm{rg}(A - 2\mathrm{Id}) = 1$ donc 2 est une valeur propre de multiplicité au moins $2 = \dim E_2$. De plus la trace de A est 3 donc la valeur propre restante est -1 car $2 + 2 + (-1) = 3$. Ainsi les valeurs propres de u (qui sont celles de A) sont 2 et -1. On en déduit également que le polynôme caractéristique de u est $P_u = -(X-2)^2(X+1)$ et qu'il est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que u est diagonalisable.

   Comme on l'a remarqué à la question 1, $\dim E_2 = 2$ et c'est la mutiplicité de 2 dans P_A. C'est également le cas de façon évidente pour -1 puisque sa multiplicité est 1. Ainsi, et puisque P_u est scindé, on en déduit que u est diagonalisable.

3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.

   Pour commencer, déterminons une base de vecteurs propres pour A. On notera E_λ^A et E_λ^u les espaces propres de A et u respectifs.

   Calculons E_2^A et E_{-1}^A. Nous savons que E_2^A est de dimension 2 ; ainsi il suffit de trouver deux vectueurs non colinéaires dans E_2^A pour en obtenir une base. La matrice $A - 2\mathrm{Id}$ est la matrice dont tous les coefficients sont -1. Deux vecteurs évidents de son noyau sont $w_1 = (1,-1,0)$ et $w_2 = (1,0,-1)$. Ces deux vecteurs forment une base de E_2^A.

   Concernant E_{-1}^A, $A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dans cette matrice on a la relation suivante entre colonnes : $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Ainsi le vecteur $w_3 = (1,1,1)$ appartient à E_{-1}^A. Ce dernier étant de dimension 1, on obtient $E_{-1}^A = \mathrm{vect}(w_3)$.

   Comme conclusion, la famille (w_1, w_2, w_3) est une base de vecteurs propres de A.

   En utilisant la base $\mathcal{B}$, on obtient les vecteurs v_1, v_2, v_3 dont les vecteurs coordonnées sont les w_i. On obtient $v_1 = b_1 - b_2 = (1,-1,0)$, $v_2 = b_1 - b_3 = (1,-1,-1)$ et $v_3 = b_1 + b_2 + b_3 = (1,2,1)$. Ces v_i forment une base de vecteurs propres de u.

Remarque : Les questions posées concernent, non pas A mais u.

Exercice 5. Les matrices suivantes sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Indication : On s'intéressera à la diagonalisibilité de ces matrices.

Les matrices A et B ont le même polynôme caractéristique $P_A = P_B = -(X-1)^2(X-2)$. Ce polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$. La matrice A (resp. B) est donc diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1^A) = 2$ (resp. $\dim(E_1^B) = 2$). Or si on écrit $A - 1 \cdot \mathrm{Id}$ et $B - 1 \cdot \mathrm{Id}$, on obtient une matrice de rang 1, donc par le théorème du rang, la dimension des espaces propres de A et B pour la valeur propre 1 est 2.

Ainsi A et B sont toutes deux diagonalisables. Elles sont donc semblables à la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(1, 1, 2)$. La similitude est une relation d'équivalence et en particulier elle est transitive ce qui entraine, puisque $A \sim D$ et $B \sim D$, que A et B sont semblables.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit u l'endomorphisme de E donné par $u(f) = f''$ (f dérivée deux fois) pour $f \in E$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $u(f)$ et $u(g)$ où $f : x \mapsto \exp(\alpha x)$ et $g : x \mapsto \sin(\alpha x)$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, $u(f)(x) = f''(x) = \alpha^2 \exp(\alpha x)$ et $u(g)(x) = g''(x) = -\alpha^2 \sin(\alpha x)$.

   Ainsi $u(f) = \alpha^2 \cdot f$ et $u(g) = -\alpha^2 \cdot g$

2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de u.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Traitons deux cas selon le signe de λ.

   Cas $\lambda \geq 0$. Soit $\alpha = \sqrt{\lambda}$. Alors en prenant f comme au (1), on obtient $u(f) = \lambda \cdot f$. Donc λ est une valeur propre de u.

   Cas $\lambda < 0$. Soit $\alpha = \sqrt{-\lambda}$. Dans ce cas, on considère g comme au (1) et on obtient $u(g) = \lambda \cdot g$ d'où l'on déduit que λ est une valeur propre de u.

   Ainsi tout $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre donc l'ensemble des valeurs propres de u est l'ensemble $\mathbb{R}$.