**Université Claude Bernard - Lyon 1** — Semestre de printemps 2013-2014

Math IV - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

**Partie CCP - Devoir numéro 3**

---

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
*Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ;* ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

## Utilisation de séries de Grégory pour l'approximation de $\pi$

Le problème propose l'étude de deux approximations de $\pi$, toutes deux utilisant des séries de Grégory définies à la partie I. Les parties II, III et IV peuvent être traitées de manière indépendante.

### I. Séries de Gréogory

Pour tout $a \in ]0;1]$, on définit la série de Grégory de paramètre $a$ par : $G_a = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}$.

1. Convergence de la série $G_a$ :
   (a) Montrer avec soin que la série $G_1$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?
   (b) Montrer que pour tout $a \in ]0;1[$, la série $G_a$ est absolument convergente.

On notera dans la suite $G$ la fonction qui à $a \in ]0;1]$ associe la valeur $G_a$, ainsi $G(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{2n+1}$.

2. Soit $a \in ]0;1]$.
   (a) Étudier les variations de la suite $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{a^n}{2n+1}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $G_{n,a}$ la somme partielle de la série $G_a$, c'est-à-dire $G_{n,a} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^k}{2k+1}$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|G(a) - G_{n,a}| \leq \frac{a^{n+1}}{2n+3}.$$

### II. Une première approximation de $\pi$ à l'aide d'une série de Grégory

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi$ périodique, impaire, définie par $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in \{0;\pi\} \\ 1 \text{ si } t \in ]0;\pi[ \end{cases}$

3. Représenter graphiquement la fonction $f$ puis déterminer ses coefficients de Fourier.
4. (a) Justifier que $f$ est développable en série de Fourier.
   (b) En déduire la formule $\pi = 4G(1)$.

La suite numérique $(4G_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\pi$ et ainsi fournit une approximation de $\pi$.

4. Précision de l'approximation :
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi - 4G_{n,1}| \leq \frac{4}{2n+3}$.
   (b) Déterminer un entier $N_1$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1$, $|\pi - 4G_{n,1}| \leq 10^{-6}$.
   (On cherchera à trouver le plus petit entier possible avec les outils à notre disposition.)
   (c) Interpréter cette dernière inégalité : écrire une phrase utilisant les mots "itérations" et "décimales exactes".

**III. Expression de la fonction arctangente à l'aide de séries de Grégory**

6. Donner (avec justifications) le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ puis déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
7. (a) Démontrer avec soin que pour tout $x \in ]-1;1[$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
   (b) En déduire une expression de $\arctan(a)$ à l'aide d'une série de Grégory lorsque $a \in ]0;1[$.

**IV. Formule de John Machin**

Pour toute cette partie, on pourra utiliser la formule suivante de trigonométrie :

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

8. Exprimer sous forme de rationnels les réels $\tan\left(2\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)\right)$ et $\tan\left(4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)\right)$.
9. En déduire la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

   *Indication : On pourra calculer* $\tan\left(4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

**V. Application de la formule de Machin pour approximer $\pi$**

10. Déterminer quatre réels strictements positifs $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$ tels que $\pi = \lambda_1 G(a_1) - \lambda_2 G(a_2)$.
11. Précision de l'approximation :
    (a) Déterminer un entier $K$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2})| \leq \dfrac{K}{25^{n+1}}$.
    (b) Trouver un entier $N_2$ vérifiant : pour tout $n \geq N_2$, $|\pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2})| \leq 10^{-6}$.
    (On cherchera à trouver le plus petit entier possible avec les outils à notre disposition.)
    (c) Comparer la précision de cette approximation avec celle de la partie II.

*Remarques :*

– Cette méthode d'approximation de $\pi$ utilisée par John Machin (1680- 1752) permit à ce dernier de calculer "à la main" 100 décimales exactes de $\pi$ en 1706.
– Les approximations de $\pi$ à l'aide de séries de Grégory permirent d'obtenir à l'aide d'ordinateurs un million de décimales en 1974. (J. Guilloud et M. Bouyer)
– Aujourd'hui, les mathématiciens ont trouvé d'autres types de techniques encore plus performantes, qui leur permettent de calculer plusieurs milliards de décimales.

## Correction du Devoir Surveillé 3 - partie CCP

### I. Séries de Grégory

1. (a) La série $G_1$ est la série de terme général $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Il s'agit d'une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n a_n \geq 0$. De plus, la suite $(|a_n|)_n = \left(\dfrac{1}{2n+1}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum a_n$ est convergente. Ainsi , la série $G_1$ est convergente.

   On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$. Puisque la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum |a_n|$ diverge, ce qui montre que la série $G_1$ ne vonverge pas absolument.

   (b) Soit $a \in ]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $b_n = (-1)^n \dfrac{a^n}{2n+1}$ le terme général de la série $G_a$. Par croissance comparée, on a
$$n^2|b_n| = \frac{n^2}{2n+1}a^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}na^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   donc $|b_n| = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$ donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, cela implique la convergence de $\sum |b_n|$ et ainsi, $G_a$ converge absolument.

2. Soit $a \in ]0;1]$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $a \in ]0;1]$, $\ln(a) \leq 0$, donc $(n+1)\ln(a) \leq n \ln a$ puis $a^{n+1} \leq a^n$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $0 \leq \dfrac{1}{2(n+1)+1} \leq \dfrac{1}{2n+1}$, on en déduit que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$, et ainsi la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

   (b) On remarque la série $G_a$ a pour terme général $(-1)^n u_n$, avec $u_n \geq 0$ pour tout $n$. Puisque la suite $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, le théorème des séries alternées implique la convergence de la série $G_a$ (ce que l'on savait déjà) et donne une majoration du reste d'ordre$n$ de cette série :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| R_{n,a} := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{2k+1} \right| \leq u_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{2n+3}$$
   ce qui est exactement l'inégalité demandée puisque $G(a) - G_{n,a} = R_{n,a}$.

### II. Une première approximation de $\pi$ à l'aide d'une série de Grégory

3. Puisque la fonction $f$ est impaire, on va chercher ses coefficients de Fourier réels. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n(f) = 0$. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule
$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{par parité de } t \longmapsto f(t)\sin(nt) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} \quad \text{puisque } n \neq 0 \\
&= \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{(2p+1)\pi} \text{ si } n = 2p+1 \text{ avec } p \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

4. (a) • La fonction $f$ est $2\pi$-périodique.

• Sur l'ouvert $]0;\pi[$, la fonction $f$ est donnée par la fonction constante égale à 1, qui admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ (à savoir elle-même). Par suite, $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0;\pi]$ puis sur $[-\pi;\pi]$ par imparité. La $2\pi$-périodicité implique que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de Dirichlet implique alors que la série de Fourier de $f$, notée $S_f$, converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de $f$, notée $\widetilde{f}$, donnée par $f : x \longmapsto \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $S_f(x) = \widetilde{f}(x)$.

De plus, la fonction $f$ est clairement continue sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ (puisqu'elle est constante sur $]0;\pi[$, impaire et $2\pi$-périodique) donc elle est égale à sa régularisée sur cet ensemble. Enfin, pour $x \in \pi\mathbb{Z}$, on a $\widetilde{f}(x) = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0 = f(x)$ (la limite à gauche et à droite au point $x$ se lisant directement sur le graphe de $f$).

On vient donc de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$, ce qui démontre que $f$ est égale en tout point à sa série de Fourier. Ainsi, $f$ est développable en série de Fourier.

(b) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = S_f(x)$ où

$$S_f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi}\sin((2p+1)x).$$

En particulier, pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient (comme $\sin((2p+1)\pi) = (-1)^p$)

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{1}{2p+1}$$

ce qui donne bien $\pi = 4G(1)$.

5. (a) On applique le résultat de la question 2b avec $a = 1$, ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi - 4G_{n,1}| = 4\,|G(1) - G_{n,1}(1)| \leq \dfrac{4}{2n+3}$, ce qui est le résultat voulu.

(b) Puisque $|\pi - 4G_{n,1}| \leq \dfrac{4}{2n+3}$ pour tout $n$, il suffit de trouver un entier $N_1$ pour lequel $\dfrac{4}{2N_1+3} \leq 10^{-6}$. Cherchons le plus petit entier vérifiant cette condition : on a

$$\frac{4}{2n+3} \leq 10^{-6} \iff \frac{2n+3}{4} \geq 10^6 \iff n \geq 2\cdot 10^6 - \frac{3}{2}.$$

Ainsi, en prenant pour $N_1$ la partie entière supérieure de $2\cdot 10^6 - \dfrac{3}{2}$, à savoir $2\cdot 10^6 - 1$, on a trouvé le plus petit entier à partir duquel $\dfrac{4}{2n+3} \leq 10^{-6}$. De plus, pour tout $n \geq N_1$, on a $|\pi - 4G_{n,1}| \leq 10^{-6}$.

(c) On vient de montrer qu'au bout de $N_1 + 1$ itérations de la suite $(4G_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$, la différence entre $\pi$ et $4G_{n,1}$ est en valeur absolue inférieure ou égale à $10^{-6}$, ce qui montre que les 5 premières décimales de $4G_{N_1,1}$ nous donnent les 5 premières décimales exactes de $\pi$.

### III. Expression de la fonction arctangente à l'aide de séries de Grégory

6. On sait que la fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{1-u}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que pour tout $u \in ]-1;1[$, $\dfrac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$. On écrit alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)}$. Comme pour tout $x \in ]-1;1[$, on a aussi $-x^2 \in ]-1;1[$, on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Comme la série précédente est convergente pour tout $x \in ]-1;1[$, on en déduit que le rayon de convergence $R$ de la série entière obtenue est supérieur ou égal à 1. De plus, la série diverge grossièrement en $x = 1$ (le terme général vaut $(-1)^n$ qui n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$), donc le rayon vaut exactement 1.

7. (a) On sait qu'une série entière converge normalement, donc uniformément, sur toute boule fermée incluse dans le disque ouvert de convergence. Par suite, elle est intégrable terme à terme. Comme la dérivée de la fonction arctan est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, on en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}(-1)^n x^{2n+1} + C$ pour tout $x \in ]-1;1[$. Puisque $\arctan(0) = 0 = C$, on trouve finalement que pour tout $x \in ]-1;1[$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

   (b) Soit $a \in ]0;1[$, d'après l'écriture précédente,

$$\arctan(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} a^{2n+1} = a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(a^2)^n}{2n+1} = aG(a^2).$$

## IV. Formule de John Machin

8. On utilise la formule de trigonométrie donnant la tangente d'une somme

$$\alpha = \tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1-\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)^2} = \frac{2\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

$$\beta = \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

9. Toujours grâce à la formule, on trouve

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

De plus, on sait que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$. Or $0 \leq \tan(\arctan(1/5)) = 1/5 \leq 1$ donc $0 \leq \arctan(1/5) \leq \pi/4$ (par stricte croissante de tan sur $]-\pi/2;\pi/2[$), ce qui démontre l'encadrement $-\frac{\pi}{4} \leq 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$. On peut donc prendre l'arctangente dans l'égalité ci-dessus pour obtenir

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \iff \frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

## V. Application de la formule de Machin pour approximer $\pi$

10. On a vu à la question 7b que $\arctan(a) = aG(a^2)$, pour tout $a \in ]0;1[$. En utilisant cette expression dans la formule de Machin, on trouve

$$\frac{\pi}{4} = 4\frac{1}{5}G\left(\frac{1}{25}\right) - \frac{1}{239}G\left(\frac{1}{239^2}\right)$$

ce qui donne au final

$$\pi = \frac{16}{5}G\left(\frac{1}{25}\right) - \frac{4}{239}G\left(\frac{1}{239^2}\right) = \lambda_1 G(a_1) - \lambda_2 G(a_2)$$

avec $\lambda_1 = \dfrac{16}{5}, a_1 = \dfrac{1}{25}, \lambda_2 = \dfrac{4}{239}, a_2 = \dfrac{1}{239^2} \in \mathbb{R}_+^*$.

11. (a) On va encore une fois utiliser l'inégalité obtenue en 2b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
|\pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2})| &= |\lambda_1(G(a_1) - G_{n,a_1}) - \lambda_2(G(a_2) - G_{n,a_2})| \\
&\leq \lambda_1 |G(a_1) - G_{n,a_1}| + \lambda_2 |G(a_1) - G_{n,a_2}| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \lambda_1 \frac{a_1^{n+1}}{2n+3} + \lambda_2 \frac{a_2^{n+1}}{2n+3} \\
&\leq \frac{16}{5} \frac{1}{2n+3} \frac{1}{25^{n+1}} + \frac{4}{239} \frac{1}{239^{2(n+1)}} \frac{1}{2n+3} \\
&\leq \frac{1}{25^{n+1}} \left( \frac{16}{5} + \frac{4}{5} \right) \quad \text{car } \frac{1}{239} \leq \frac{1}{5} \text{ et } \frac{1}{2n+3} \leq 1 \\
&\leq \frac{4}{25^{n+1}}
\end{aligned}$$

On peut donc prendre $K = 4$

(b) Comme précédemment, on cherche le plus petit entier vérifiant $\frac{4}{25^{n+1}} \leq 10^{-6}$, or

$$\begin{aligned}
\frac{4}{25^{n+1}} \leq 10^{-6} \quad &\Longleftrightarrow \quad 25^{n+1} \geq \frac{10^6}{4} \Longleftrightarrow (n+1)\ln(25) \geq \ln\left(\frac{10^6}{4}\right) \Longleftrightarrow (n+1) \geq \frac{6\ln 10 - 2\ln 2}{2\ln 5} \\
&\Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{3\ln 10 - \ln 2}{\ln 5} - 1
\end{aligned}$$

On prend donc $N_2 = \left[\frac{3\ln 10 - \ln 2}{\ln 5} - 1\right]$ où $[x]$ désigne la partie entière supérieure de $x$.

(c) Par des majorations grossières, on peut voir que $\frac{3\ln 10 - \ln 2}{\ln 5} - 1 \leq \frac{3\ln(5^2) + \ln 5}{\ln 5} - 1 = 6$, donc $N_2 \leq 6$, alors que $N_1 = 2 \cdot 10^6 - 1$. Par conséquent, $N_2$ est extrêmement petit par rapport à $N_1$. La deuxième approximation est meilleure (au sens où elle converge plus rapidement vers $\pi$), on aura besoin au maximum de seulement 7 itérations de la suite pour obtenir 5 décimales de $\pi$.