Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice 1. Les deux questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle $x^3y'(x) - x^2y(x) = 1$, d'inconnue y dérivable, sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = x^2 + 1$ d'inconnue y deux fois dérivable.

Problème 1. Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombre réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et Id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f.

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\mathrm{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) | h^2 = f\}.$$

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

Partie A

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2.
6. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

Partie B

Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.
2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
3. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.
4. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geq 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.
5. Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.
6. Montrer que f est diagonalisable en exhibant une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. Ecrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.
7. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
8. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.
9. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$.
   (a) Calculer $(A - I_3)(A - 4I_3)$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de h.
   (c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(h - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(h + 2\,\mathrm{Id})$.
   (d) En déduire que h est diagonalisable.

Correction du Devoir Surveillé 3 - partie CCP

Correction du problème 1

1. Sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, on peut normaliser l'équation différentielle, qui devient $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x^3}$. La solution générale de l'équation différentielle homogène associée est $y_0 : x \longmapsto Ce^{\ln|x|} = C|x|$ avec $C \in \mathbb{R}$ (qui peut s'écrire $y_0 : x \longmapsto C'x$, avec $C' \in \mathbb{R}$). Ensuite, on utilise la méthode de la variation de la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation différentielle. On cherche donc une solution de celle-ci sous la forme $g : x \longmapsto C(x)x$ avec C une fonction dérivable. On obtient pour tout x, $C'(x) = \frac{1}{x^4}$. Il suffit alors de prendre $C : x \longmapsto -\frac{1}{3x^3}$ et donc $g : x \longmapsto -\frac{1}{3x^2}$. Ainsi les solutions de l'équation différentielle, sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ sont les fonctions $y : x \longmapsto Cx - \frac{1}{3x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   Si y est une solution de l'équation différentielle $x^3y'(x) - x^2y(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que $y(x) = \begin{cases} C_1x - \frac{1}{3x^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ C_2x - \frac{1}{3x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

   Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = -\infty$, la fonction n'est pas prolongeable par continuité en 0. Ainsi l'équation différentielle $x^3y'(x) - x^2y(x) = 1$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

2. On résout l'équation homogène $y'' + y = 0$, dont l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, qui a pour solutions $\pm i$.La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par $y : x \longmapsto C_1 \cos x + C_2 \sin x$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré et on trouve que $x \longmapsto x^2 - 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle. Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est $\{x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 \cos(x) + C_2 \sin x + x^2 - 1 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$.

Correction du problème 1

Partie A

1. Calculons le polynôme caractéristique de A (donc aussi de f) :

$$P_f(X) = P_A(X) = \begin{vmatrix} 8-X & 4 & -7 \\ -8 & -4-X & 8 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(X-1)(X-4).$$

   Ainsi, P_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc f est diagonalisable .

2. L'étude des sous-espaces propres donne :

   $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, -2, 0)$,

   $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1, 0, 1)$,

   $E_4(f) = \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1, -1, 0)$. Alors la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et la matrice de f dans cette base, notée D, est :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. La formule de changement de base donne : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, et donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$ (récurrence immédiate) .

4. En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   Après calculs, on trouve que la matrice de f^m dans la base canonique est :

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^m & 4^m & 1 - 2 \cdot 4^m \\ -2 \cdot 4^m & -4^m & 2 \cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   En particulier, on vérifie que cela redonne A pour $m = 1$.

5. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ une matrice qui commute avec D. On écrit que $MD = DM$, et la formule donnant le terme général d'un produit de matrice implique que $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Donc nécessairement, M est une matrice diagonale.

   Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D qui est elle-même diagonale.

   Finalement, les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

6. On a $HD = DH = H^3$, donc H et D commutent.

7. D'après la question 5, si $H^2 = D$, alors H est une matrice diagonale. La condition $H^2 = D$ donne également :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

   (ce qui fournit 4 solutions).

   Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On a l'équivalence : h vérifie $h^2 = f$ ssi la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$, notée H, vérifie $H^2 = D$, donc si et seulement si H est l'une des 4 matrices précédentes. Pour obtenir la matrice de h dans la base canonique, on effectue un changement de base : on obtient $P \cdot H \cdot P^{-1}$, où H est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions. Donc il y a 4 endomorphismes vérifiant $h^2 = f$, leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Partie B

1. Par récurrence immédiate, on trouve pour tout entier $m \geq 1$: $J^m = 3^{m-1} J$.

2. Travaillons avec les matrices A et J. On a $A = J + I_3$. Comme J et I_3 commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \; A^m = (I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \cdot 3^{k-1} \right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J.$$

   Si on revient aux endomorphismes, cela donne : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Evidemment, cette relation est encore valable pour $m = 0$ (car dans ce cas, on a $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$).

3. Un calcul du polynôme caractéristique de A donne : $P_f(X) = P_A(X) = -(X-1)^2(X-4)$. Donc f admet les deux valeurs propres $\lambda = 1$ et $\mu = 4$.

4. D'après la question 2, on peut écrire $f^m = 1^m(\mathrm{Id} - \frac{1}{3}j) + 4^m(\frac{1}{3}j)$ pour tout entier $m \geq 0$. En posant $p = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$, on obtient l'existence de la décomposition voulue .

De plus, si une telle décomposition existe, alors on a nécessairement $\mathrm{Id} = p + q$ (obtenue pour $m = 0$) et $f = p+4q$ (obtenue pour $m = 1$). Donc $p = \dfrac{1}{3}(4\,\mathrm{Id} - f)$ et $q = \dfrac{1}{3}(f - \mathrm{Id})$, d'où l'unicité de cette décomposition .

Enfin, comme Id et j sont deux endomorphismes linéairement indépendants (d'après leur écriture matricielle), il en est de même pour p et q. On peut aussi revenir à la définition et l'étudier directement.

5. On obtient, en utilisant les expressions de p et q trouvées à la question précédente :

$$p^2 = p,\ q^2 = q,\ p \circ q = q \circ p = 0.$$

Soit maintenant $h = \alpha \cdot p + \beta \cdot q$ tel que $h^2 = f$. D'après les relations précédentes, on a

$$h^2 = \alpha^2 \cdot p + \beta^2 \cdot q = f = p + 4q.$$

Comme (p, q) est une famille libre, cette égalité équivaut à $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$. Donc il y a 4 endomorphismes h solutions, donnés par : $h = \pm p \pm 2q$.

6. On détermine les sous-espaces propres de f :
$E_1(f) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ avec $w_1 = (1, -1, 0)$ et $w_2 = (0, 1, -1)$,
$E_4(f) = \mathrm{Vect}(w_3)$ avec $w_3 = (1, 1, 1)$.
Comme $\dim(E_1(f)) + \dim(E_4(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, et que les sous-espaces propres sont en somme directe, on a $E_1(f) \oplus E_4(f) = \mathbb{R}^3$. Ainsi, $\mathcal{B}_d = (w_1, w_2, w_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f ce qui démontre que f est diagonalisable.
Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_d$ est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et on a aussi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_d}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_d}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. On peut prendre par exemple :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_d$ est Y. Alors $h^2 = f$ car $Y^2 = D$. Et h n'est pas combinaison linéaire de p et q, car Y n'est pas combinaison linéaire de leurs matrices (vues précédemment) dans la base $\mathcal{B}_d$.

9. Soit h tel que $h^2 = f$.
   (a) Un calcul direct donne $(A - I_3)(A - 4I_3) = 0$.
   (b) On en déduit que $(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\,\mathrm{Id}) = 0$, et puisque $h^2 = f$, cela donne $(h^2 - \mathrm{Id}) \circ (h^2 - 4\,\mathrm{Id}) = 0$. Le polynôme $Q = (X^2 - 1)(X^2 - 4) = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2)$ est donc annulateur de h.
   (c) D'après le lemme des noyaux, puisque les polynômes $(X - 1), (X + 1), (X - 2), (X + 2)$ sont premiers entre eux deux à deux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(0) = \mathrm{Ker}(Q(h)) = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(h - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(h + 2\,\mathrm{Id}).$$

(d) Puisque la concaténation d'une base de chacun des ensembles $\mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}), \mathrm{Ker}(h + \mathrm{Id}), \mathrm{Ker}(h - 2\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(h + 2\,\mathrm{Id})$ donne une base de $\mathbb{R}^3$, il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de h, donc h est diagonalisable.