**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2014-2015

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

**Partie CCP - Devoir numéro 3**

---

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
*Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ;* ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

**Problème : Calcul de la somme d'une série**

Le but du problème est de calculer la valeur de la somme $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

### I. Résultats préliminaires

1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n+1)}$ converge. Sa somme est donc bien définie.
2. (a) Donner, en détaillant les calculs, une primitive de $x \longmapsto \ln(1+x)$ (on précisera le domaine de définition).

   (b) Déterminer la limite lorsque $x$ tend vers $1^-$ de la fonction $\phi$ définie par :

$$\phi(x) = (x+1)\ln(1+x) - (1-x)\ln(1-x) - 2x.$$

3. Déterminer la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

### II. Étude d'une série entière

On considère la fonction $f$ suivante définie comme la somme d'une série entière :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}.$$

4. Démontrer que la fonction $f$ est définie et continue sur $[-1;1]$.
5. Déterminer le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.
6. Justifier la dérivabilité de $f$ sur $[0;1[$, puis démontrer que :

$$\forall x \in [0;1[, \quad f'(x) = -(\ln(1+x) + \ln(1-x)).$$

7. En déduire, pour $x \in [0;1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de $\phi(x)$.
8. Déterminer la valeur de $s$.

### III. Convergence uniforme de sur le disque ouvert de convergence

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ converge uniformément sur $]-1;1[$, son disque ouvert de convergence. Nous allons démontrer que ce résultat n'est pas vrai en général, en utilisant une série entière qui ne converge pas uniformément sur son disque ouvert de convergence.

9. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x^n$.
10. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x^n$ ne converge pas uniformément sur son disque ouvert de convergence.

**Exercice 1.** Dans tout l'exercice, $E$ désigne l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, et on note $I_3$ la matrice identité. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$.

1. Citer le théorème de Cayley-Hamilton. En déduire un polynôme non nul annulateur de la matrice $A$.
2. La matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ? dans $E$ ?
3. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k$.
4. Démontrer que le sous-espace vectoriel $F$ de $E$ engendré par les puissances positives de la matrice $A$ est de dimension finie. Exhiber une base $\mathcal{B}$ de $F$ constituée de puissances successives de $A$.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\theta^k}{k!} A^k.$$
Justifier que $S_n$ appartient à $F$. Donner les composantes de $S_n$ dans la base $\mathcal{B}$ obtenue à la question précédente.
6. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ existe. Dans la suite, on note $M$ cette limite.
7. Vérifier que $M \in F$ et déterminer ses composantes dans la base $\mathcal{B}$.
8. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté usuel. Démontrer que $M$ est la matrice dans $\mathcal{C}$ d'une rotation vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
9. Déterminer les valeurs du réel $\theta$ pour lesquelles la matrice $M^2$ est la matrice d'une symétrie vectorielle (on précisera les éléments caractéristiques).

# Correction du Devoir Surveillé 3 - partie CCP

**Correction du problème :**

1. Puisque $\dfrac{1}{n(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ et que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann d'exposant $2>1$, la série $\sum \dfrac{1}{n(2n+1)}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

2. (a) Tout d'abord, la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est définie et continue sur $]-1;+\infty[$, donc elle admet des primitives sur cet intervalle. Pour tout $x \in ]-1;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^{1+x} \ln(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{par changement de variable } u=1+t\\ &= [u\ln u]_1^{1+x} - \int_1^{1+x} \frac{u}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{par intégration par parties de fonctions } \mathcal{C}^1\\ &= (1+x)\ln(1+x) - x\end{aligned}$$

Ainsi une primitive de $f$ sur $]-1;+\infty[$ est $F : x \longmapsto (1+x)\ln(1+x) - x$ (c'est la primitive s'annulant en 0).

   (b) Lorsque $x$ tend vers $1^-$, $x+1 \longrightarrow 2$, donc $(x+1)\ln(x+1)$ tend vers $2\ln(2)$ par continuité du logarithme en 2. De plus, $u=(1-x) \longrightarrow 0^+$, donc $(1-x)\ln(1-x) = u\ln(u) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Ainsi, $\phi(x)$ tend vers $2\ln(2)-2$ lorsque $x\to1^-$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-1/n)} = e^{n(-1/n+o_{n\to+\infty}(1/n))} = e^{-1+o_{n\to+\infty}(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$$

par continuité de l'exponentielle.

## II. Étude d'une série entière

4. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1;1]$, alors $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n(2n+1)}$. Ceci étant valable pour tout $x \in [-1;1]$, on en déduit que la fonction $u_n$ est bornée sur $[-1;1]$ et que sa borne supérieure vérifie

$$\|u_n\|_{\infty,[-1;1]} = \sup_{x\in[-1;1]} |u_n(x)| \leq \frac{1}{n(2n+1)}.$$

Puisque la série numérique $\sum \dfrac{1}{n(2n+1)}$ converge d'après la question 1, la série $\sum \|u_n\|_{\infty,[-1;1]}$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1;1]$. Comme de plus $u_n$ est continue sur $[-1;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en conclut par le théorème de continuité des séries de fonctions que la fonction $f$ est définie et continue sur $[-1;1]$.

5. Notons $R$ le rayon de convergence de la série entière donnée. La série numérique $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ converge pour tout $x \in [-1;1]$, donc $R$ est supérieur ou égal à 1. En outre, si $x>1$, alors

$$\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)} = \frac{e^{(2n+1)\overbrace{\ln x}^{>0}}}{n(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

par croissance comparée, donc la série numérique $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ diverge grossièrement. Ainsi, $R \leq 1$, d'où l'égalité $R=1$.

6. D'après les propriétés des séries entières, la fonction somme $f$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$, donc en particulier sur $[0;1[$. De plus, on peut la dériver terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in [0;1[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)\frac{x^{2n}}{n(2n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n} \\
&= -\ln(1-x^2) \qquad \text{car } \forall u \in ]-1;1[, -\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n} \\
&= -\left(\ln(1+x)+\ln(1-x)\right).
\end{aligned}$$

7. En reprenant les notations de la question 2a, on en déduit que pour tout $x \in [0;1[$,

$$f(x) = -\left(F(x) - F(1-x)\right) = (1-x)\ln(1-x) - (1+x)\ln(1+x) + 2x.$$

Par conséquent, pour tout $x \in [0;1[$, $f(x) = -\phi(x)$.

8. La valeur de $s$ est donnée par $s = f(1)$. Puisque la fonction $f$ est continue sur $[0;1]$, on a d'une part $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. D'autre part, les fonctions $f$ et $-\phi$ coïncident sur $[0;1[$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \phi(x)$. D'après la question 2b, on obtient au final,

$$s = 2 - 2\ln(2).$$

## III. Convergence uniforme sur le disque ouvert de convergence

9. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 > 0$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, comme $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n = \sum x^n$ est $R' = \dfrac{1}{1} = 1$. On aurait aussi pu utiiser la définition même du rayon de convergence.

10. On sait que si la série éntière $\sum x^n$ converge uniformément sur $]-1;1[$, alors la série de fonctions $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n : x \longmapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]-1;1[$. Démontrons donc que cette suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $]-1;1[$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \in ]-1;1[$, d'où

$$\|v_n\|_{\infty,]-1;1[} = \sup_{x\in]-1;1[} |v_n(x)| \geq |v_n(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0$$

ce qui démontre que la suite $(v_n)_n$ ne converge pas uiformément vers la fonction nulle. Ainsi, la série entière $\sum x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1;1[$.

On aurait aussi pu raisonner avec les restes : puisque la série entière $\sum x^n$ converge simplement sur $]-1;1[$, elle converge uniformément sur $]-1;1[$ si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ des restes converge uniformément vers la fonction nulle sur $]-1;1[$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n : x \longmapsto \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k$. Or pour tout $x \in ]-1;1[$, on a

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = x^{n+1}\frac{1}{1-x}$$

puis on démontre de même que $\|R_n\|_{\infty,]-1;1[}$ ne tend pas vers 0 avec la même suite $(x_n)_n$.

**Correction de l'exercice :**

1. Le théorème de Cayley-Hamilton dit que le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ au programme) est annulateur de la matrice $M$. Par calculs par blocs (ou développement par rapport à la dernière ligne), le polynôme caractéristique de la matrice $A$ est $P_A = -X(X^2+1)$, qui est non nul et annulateur de $A$.

2. Puisque le polynôme caractéristique $P_A = -X(X-i)(X+i)$ est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples, $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. De plus, puisque $P_A$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, $A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Tout d'abord, $A^0 = I_3$. Un calcul par blocs montre que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

On démontre alors par récurrence immédiate sur $p$ que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p} = (-1)^{p-1}A^2 \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{2p+1} = (-1)^p A.$$

4. Puisque $F = \mathrm{Vect}\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace de $E$, avec $\dim(E) = n^2 < +\infty$, $F$ est lui aussi de dimension finie. De plus, d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathrm{Vect}\{I_3, A, A^2\}$ donc par stabilité par combinaison linéaire, $F \subset \mathrm{Vect}\{I_3, A, A^2\}$. L'inclusion réciproque étant ditrecte par définition de $F$, on en déduit que $F = \mathrm{Vect}\{I_3, A, A^2\}$, donc la famille $(I_3, A, A^2)$ est génératrice de $F$.

   De plus, soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0_E$, alors on a

$$\begin{pmatrix} \alpha - \gamma & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = 0_E$$

   d'où $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, ce qui démontre la liberté de la famille $(I_3, A, A^2)$. Ainsi, $\mathcal{B} = (I_3, A, A^2)$ est une base de $F$ constituée de puissances consécutives de la matrice $A$.

5. $S_n$ appartient à $F$ comme combinaison linéaire de puissances entières de $A$. On a

$$S_n = I_3 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} \frac{\theta^k}{k!}A^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{\theta^k}{k!}A^k = I_3 + \left( \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}(-1)^p \right) A + \left( \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\theta^{2p}}{(2p)!}(-1)^{p-1} \right) A^2$$

   ce qui donne l'expression de $S_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

6. On sait que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite converge si et seulement si les suites des coordonnées convergent. D'après les développements en série entière de sin et cos, on trouve

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}(-1)^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sin(\theta)$$

   et

$$\sum_{p=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\theta^{2p}}{(2p)!}(-1)^{p-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} = -(\cos(\theta) - 1) = 1 - \cos(\theta)$$

   ce qui justifie l'existence de la limite $M$ de $S_n$ lorsque $n \to +\infty$.

7. L'étude des limites des suites coordonnées entraîne $M = I_3 + \sin(\theta)A + (1 - \cos(\theta))A^2$, ce qui prouve que $M \in F$ et donne directement les composantes de $M$ dans $\mathcal{B}$.

8. En remplaçant $A$ et $A^2$ par les matrices, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $M$ est la matrice dans $\mathcal{C}$ de la rotation d'axe $D$ dirigé et orienté par $e_3$, et d'angle $\theta$.

9. Si $M^2$ est la matrice d'une symétrice vectorielle, alors $(M^2)^2 = I_3$, d'où

$$\begin{pmatrix} \cos(4\theta) & -\sin(4\theta) & 0 \\ \sin(4\theta) & \cos(4\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

ce qui donne $4\theta \equiv 0\ [2\pi]$ et ainsi $\theta \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

Réciproquement, si $\theta \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, alors $2\theta \equiv 0$ ou $\pi\ [2\pi]$

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $M^2 = I_3$ et $M$ est la matrice de la symétrie orthogonale de direction $\{0\}$.
- Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, alors $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans $\mathcal{C}$ de la symétrie orthogonale de direction $D = \mathrm{Vect}(e_3)$.