Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022

Math III - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Partie ALGÈBRE (barème approximatif $\simeq 13$)

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{rang}(u-\mathrm{Id}) = 1$.

1. Montrer que 1 est une valeur propre de u.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de u est de la forme $\chi_u = (X-a)^2(X-b)$ avec a et b réels. On déterminera a explicitement et on exprimera b en fonction de $\det(u)$. En déduire que $\mathrm{Tr}(u) = \det(u) + 2$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur b pour que l'endomorphisme u soit diagonalisable.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = \{1, X, X^2\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le spectre de u ainsi que les espaces propres de u. On fera bien attention au fait que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et non de $\mathbb{R}^3$.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que si $D = \mathrm{Vect}(P)$ est une droite stable par u, alors P est un vecteur propre de u.

   (b) En déduire qu'il existe une seule droite stable par u et la préciser. On la notera F dans la suite.
4. Soit $G = \mathrm{Ker}(u^2 + 2u + 3\,\mathrm{Id})$.

   (a) Montrer que G est un plan de $\mathbb{R}_2[X]$ stable par u.

   (b) Montrer que G et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   (c) Soit G' un autre plan stable par u différent de G. Montrer que $G \cap G'$ est de dimension 1.

   (d) En déduire tous les plans stables par u.

Partie ANALYSE (barème approximatif $\simeq 10$)

Exercice 3.

1. Montrer que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{x-1-(y+5)^2}{x-1+(y+5)^2}$ n'admet pas de limite en $(1, -5)$.
2. Montrer que la fonction $g : (x, y) \longmapsto \dfrac{x}{2+x^4+y^4}$ admet une limite finie lorsque $\|(x, y)\| \to +\infty$ et la déterminer.

Exercice 4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} y \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que l'ensemble $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que f admet des dérivées partielles (d'ordre 1) sur U et les expliciter.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence des dérivées partielles (d'ordre 1) de f au point $(a, 0)$ (on pourra distinguer les cas $a = 0$ et $a \neq 0$ pour l'étude).

Correction du Devoir Surveillé 3 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \dim(E) - \operatorname{rang}(u - \mathrm{Id}) = 3 - 1 = 2 \neq 0$, donc 1 est valeur propre de u. Notons m_1 sa multiplicité algébrique, par le cours, on sait que $1 \leq \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) \leq m_1$, donc $m_1 \geq 2$.

2. Puisque $m_1 \geq 2$, le polynôme caractéristique de u est au moins divisible par $(X-1)^2$. De plus, χ_u est unitaire, de degré 3, à coefficients réels, donc il s'écrit sous la forme $\chi_u = (X-1)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 1. On peut donc noter $Q = X - b$ avec $b \in \mathbb{R}$. En utilisant les coefficients connus de χ_u, on peut identifier les termes pour déterminer b. D'une part

$$\chi_u = (X^2 - 2X + 1)(X - b) = X^3 - (b+2)X^2 + (2b+1)X - b$$

et d'autre part

$$\chi_u = X^3 - \operatorname{Tr}(u)X^2 + \alpha X - \det(u) \quad \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

ce qui donne finalement $b + 2 = \operatorname{Tr}(u)$ et $b = \det(u)$. Ainsi, on a obtenu $\chi_u = (X-1)^2(X - \det(u))$ et $\operatorname{Tr}(u) = \det(u) + 2$.

3. Puisque $\chi_u = (X-1)^2(X-b)$, le spectre de u, qui est égal à $\{1; b\}$, est composé de 2 éléments distincts si $b \neq 1$ et d'un seul élément si $b = 1$. On distingue donc ces deux cas.

   - Si $b = 1$, alors 1 est l'unique valeur propre de u, de multiplicité algébrique $m_1 = 3 \neq \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = 2$, donc l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable.
   - Si $b \neq 1$, le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$, 1 est valeur propre de u de multiplicité algébrique $m_1 = 2$ et b est valeur propre de multiplicité $m_b = 1$. D'après le cours, $1 \leq \dim(E_b(u)) = \dim \operatorname{Ker}(u - b\,\mathrm{Id}) \leq m_b = 1$, donc $\dim(E_b(u)) = m_b$. De plus, on a vu ci-dessus que $\dim E_1(u) = \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = 2 = m_1$, donc pour chaque valeur propre de u, les multiplicités algébriques et géométriques sont égales. On en conclut que u est diagonalisable.

   Finalement, la condition demandée est : u est diagonalisable si, et seulement si, $b = \det(u) \neq 1$.

Correction de l'exercice 2

1. Commençons par déterminer le polynôme caractéristique de u : en effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, on trouve

$$P_u = \det(XI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} X+2 & -1 & 4 \\ -1 & X+2 & -2 \\ -1 & 1 & X-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X+1 & -1 & 4 \\ X+1 & X+2 & -2 \\ 0 & 1 & X-1 \end{pmatrix}$$

Par multilinéarité du déterminant, on peut alors factoriser par $(X+1)$ dans la première colonne, faire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ afin de développer par rapport à la première colonne

$$P_u = (X+1)\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & X+2 & -2 \\ 0 & 1 & X-1 \end{pmatrix} = (X+1)\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & X+3 & -6 \\ 0 & 1 & X-1 \end{pmatrix} = (X+1)\det \begin{pmatrix} X+3 & -6 \\ 1 & X-1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne finalement

$$P_u = (X+1)\left[(X+3)(X-1) + 6\right] = (X+1)(X^2 + 2X + 3).$$

Le polynôme X^2+2X+3 étant de discriminant $-8<0$, il n'admet aucune racine réelle. Par conséquent, le spectre de u est $\{-1\}$. Notons $E_{-1}(u)=\operatorname{Ker}(u+\operatorname{Id})$ le sous-espace propre associé à -1. Soit $P=a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{aligned}
P\in E_{-1} &\iff (A+I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-1&1&-4\\1&-1&2\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}-a+b-4c=0\\a-b+2c=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-a+b-4c=0\\a-b+2c=0\end{cases} \quad \text{en ayant effectué } L_2\leftarrow L_2+L_1\\
&\iff \begin{cases}a=b\\c=0\end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que $E_{-1}=\{a+aX\mid a\in\mathbb{R}\}=\{a(1+X)\mid a\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}\{1+X\}$.

2. Puisque P_u n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable.

3. (a) La droite $D=\operatorname{Vect}(P)$ est stable par u signifie que $u(D)\subset D$. En particulier, $u(P)\in D=\operatorname{Vect}(P)$ donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $u(P)=\lambda P$. Comme de plus D est de dimension 1, on a nécessairement $P\neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, ce qui permet de conclure que P est un vecteur propre de u.

   (b) Si $D=\operatorname{Vect}(P)$ est une droite stable par u, la question précédente montre que P est un vecteur propre de u. Comme u ne possède qu'un seul espace propre à savoir $E_{-1}(u)$, on en déduit que $P\in E_{-1}(u)$. Par stabilité par combinaisons linéaires d'un sous-espace vectoriel, cela entraîne $D\subset E_{-1}(u)$ puis $D=E_{-1}(u)$ car $\dim(D)=1=\dim(E_{-1}(u))$. Cela démontre que u admet au plus une droite stable, qui est $E_{-1}(u)$.

   Réciproquement, par le cours, $E_{-1}(u)=\operatorname{Ker}(u+\operatorname{Id})$ est stable par u puisque c'est un espace propre associé à u, et comme il est de dimension 1, c'est bien une droite stable par u. Ainsi, u admet une unique droite stable $F=E_{-1}(u)=\operatorname{Vect}\{1+X\}$.

4. (a) La matrice de $u^2+2u+3\operatorname{Id}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ est

$$A^2+2A+3I_3=\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

   qui est de rang 1 puisque $L_2=L_1$ n'est pas nulle et L_3 est nulle. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(G)=\dim(\mathbb{R}_2[X])-\operatorname{rang}(u^2+2u+3\operatorname{Id})=3-1=2$ donc G est un plan de $\mathbb{R}_2[X]$.

   De plus, pour tout $P\in G$, comme u commute avec u^n pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$(u^2+2u+3\operatorname{Id})(u(P))=(u^2+2u+3\operatorname{Id})\circ u(P)=u\circ(u^2+2u+3\operatorname{Id})(P)=u\left(0_{\mathbb{R}_2[X]}\right)=0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

   ce qui démontre que $u(P)\in G$. Par conséquent, G est stable par u.

   (b) On a déjà $\dim(G)+\dim(F)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}_2[X])$. Soit $P\in F\cap G$, alors il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ vérifiant $P=\alpha(1+X)$. Or $u(1+X)=-(1+X)$, d'où $u^2(1+X)=1+X$. Ainsi,

$$0_{\mathbb{R}_2[X]}=(u^2+2u+3\operatorname{Id})(P)=\alpha(1+X)-2\alpha(1+X)+3\alpha(1+X)=2\alpha(1+X)$$

   ce qui entraîne $\alpha=0$, d'où l'inclusion $F\cap G\subset\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. L'inclusion réciproque étant vraie puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. On a donc démontré que $F\oplus G=\mathbb{R}_2[X]$, *i.e.* que les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) Tout d'abord, $G \cap G' \subset G$, donc $\dim(G \cap G') \leq \dim(G) = 2$. Cette dimension ne peut d'ailleurs pas être égale à 2 sinon on aurait $G \cap G' = G = G'$ ce qui est exclus puisque $G \neq G'$. Par la formule de Grassmann, on a de plus $\dim(G \cap G') = \dim(G) + \dim(G') - \dim(G + G')$. Or $G + G'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, donc de dimension inférieure à $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$. Par suite, $\dim(G \cap G') \geq 4 - 3 = 1$ ce qui implique finalement que $\dim(G \cap G') = 1$.

(d) Par le cours, on sait que $G \cap G'$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$ stable par u en tant qu'intersection de deux sous-espaces stables par u. Comme il est de dimension 1, la question 3b entraîne que $G \cap G' = F$. Mais alors $F \subset G$ ce qui est contradictoire avec $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. On en déduit qu'il ne peut pas exister de plan différent de G stable par u. Le plan G est donc l'unique plan de $\mathbb{R}_2[X]$ stable par u.

Correction de l'exercice 3

1. La suite $((1, -5 + 1/n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $(1, -5)$ et $f(1, -5 + 1/n) = \dfrac{-1/n^2}{1/n^2} = -1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1$. Par ailleurs, la suite $((1+1/n, -5+1/n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers $(1, -5)$ et vérifie $f(1+1/n, -5+1/n) = \dfrac{1/n - 1/n^2}{1/n + 1/n^2} = \dfrac{1 - 1/n}{1 + 1/n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \neq -1$. Par la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f n'admet pas de limite en $(1, -5)$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe $r \geq 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$ tels que $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r = \|(x, y)\|$. On peut alors écrire, puisque $|\cos(\theta)| \leq 1$,

$$|f(x,y)| = \frac{|r\cos(\theta)|}{2 + r^4(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))} \leq \frac{r}{r^4(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))} = \frac{1}{r^3(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))}$$

La fonction $h : \theta \longmapsto \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)$ est continue sur le segment $[0; 2\pi]$, donc elle admet un minimum $m > 0$. En effet, m ne peut pas être nul, car on aurait alors pour un certain $\theta_0 \in [0; 2\pi]$, $m = \cos^4(\theta_0) + \sin^4(\theta_0) = 0 \iff \cos^4(\theta_0) = 0 = \sin^4(\theta_0) \iff \cos(\theta_0) = 0 = \sin(\theta_0)$ ce qui est absurde car les fonctions cos et sin ne s'annulent pas en même temps. On en déduit que

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{r^3 m} = \frac{1}{m\|(x,y)\|^3} \underset{\|(x,y)\| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre par encadrement que $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y) = 0$.
On aurait aussi pu utiliser les formules de trigonométrie pour écrire

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geq \frac{1}{2}$$

ou sans passer en polaires, remarquer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a - b)^2 \geq 0$ donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ce qui entraîne

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leq 2(x^4 + y^4) \quad \text{d'où} \quad x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^4$$

ce qui entraîne

$$|f(x,y)| \leq \frac{\|(x,y)\|}{2 + \|(x,y)\|^4/2} \leq \frac{2}{\|(x,y)\|^3}$$

Correction de l'exercice 4

1. L'ensemble $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant que réunion de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit cartésien d'ouverts de $\mathbb{R}$.

2. Sur l'ouvert U, la fonction f est donnée par $(x,y) \longmapsto y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$. En notant

$$p_1 : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et } p_2 : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

on remarque que $f_{|U} = p_2 \times \cos\circ\dfrac{p_1}{p_2}$. La fonction $\dfrac{p_1}{p_2}$ est continue (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur U en tant que quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Puisque la fonction cosinus est continue (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la composée $\cos\circ\dfrac{p_1}{p_2}$ est continue (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur U. Par produit de fonctions continues, il en est de même de $f_{|U}$. Comme U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est continue sur U.

Il reste à étudier la continuité de f aux points de la forme $(a,0)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Par définition, on a $f(a,0) = 0$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, alors

$$|f(x,y)| = |y|\left|\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq |y| \leq \|(x,y)-(a,0)\|$$

Cette majoration est encore vraie pour les points de la forme $(x,0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ puisque $f(x,0) = 0$. Ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq |f(x,y)| \leq \|(x,y)-(a,0)\| \underset{(x,y)\to(a,0)}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0 = f(a,0)$. Par conséquent, la fonction f est continue en $(a,0)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. La décomposition de $f_{|U}$ faite à la question précédente permet de démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert U. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, donc elle admet des dérivées partielles (d'ordre 1) sur U (qui sont continues sur U). De plus, pour tout $(x,y) \in U$,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & y\dfrac{1}{y}\left(-\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\right) = -\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) + y\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)\left(-\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\right) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{array}$$

4. Soit $b \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, on a

$$\frac{1}{t}\left(f(a+t,0) - f(a,0)\right) = \frac{1}{t}\times 0 = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ existe et vaut 0. Pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable, on va distinguer les cas selon que $a = 0$ ou non.

   - Si $a = 0$, alors pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a

   $$\frac{1}{t}\left(f(a,0+t) - f(a,0)\right) = \frac{1}{t}t\cos\left(\frac{0}{t}\right) = 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

   ce qui démontre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.

   - Si $a \neq 0$, alors pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a

   $$\frac{1}{t}\left(f(a,0+t) - f(a,0)\right) = \cos\left(\frac{a}{t}\right)$$

   qui n'admettra pas de limite lorsque $t \to 0$. En effet, si l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \dfrac{a}{n\pi}$ alors $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\cos\left(\dfrac{a}{t_n}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$ puisque la sous-suite des termes pairs tend vers 1 et celle des termes impairs tend vers -1. Par conséquent, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ n'existe pas.