Partie commune - Devoir numéro 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ALGÈBRE

Exercice 1. Soit E un espace euclidien (non orienté) de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\beta = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme u de E dont la matrice dans la base β est

$$A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme orthogonal.
2. Rappeler la classification des endomorphismes orthogonaux de E en fonction de leur déterminant.
3. Montrer que u est une rotation dont on précisera l'axe et un angle (non orienté).

Exercice 2.

1. Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace vectoriel euclidien E. Énoncer le théorème spectral appliqué à u.
2. Déterminer une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

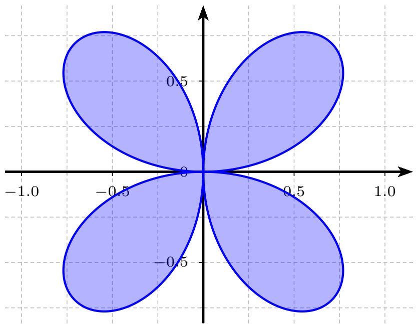
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = QDQ^{-1}.$$

Exercice 3. Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction cosinus en $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Soit $f :]-\infty; 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln((2-x)(3-x))$ pour tout $x < 2$. Déterminer le développement en série entière de f en 0 et préciser le rayon de convergence de la série entière associée.

Exercice 4. On considère l'application N définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = |3x-y| + 2\,|y|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité fermée pour N.
3. Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}^2$ pour laquelle la boule fermée unité est la suivante ?



Exercice 5. On se place dans $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ que l'on peut munir des normes suivantes :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t \quad \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|\,.$$

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0;1], \quad f_n(x) = n^{3/4} x e^{-n\frac{x^2}{2}}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\|f_n\|_\infty$, puis étudier la convergence de la suite $(f_n)_n$ dans $(E, \|\ \|_\infty)$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle dans $(E, \|\ \|_1)$.

Correction de la partie analyse du Devoir Surveillé 3 - partie commune

Correction de l'exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $u = x - \dfrac{\pi}{2}$, alors en utilisant le développement en série entière en 0 de sin valable sur $\mathbb{R}$

$$\cos(x) = \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(u) = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}.$$

2. Soit $x \in]-\infty; 2[$, alors $2 - x > 0$ et $3 - x > 0$ donc par propriétés du logarithme

$$f(x) = \ln(2+x) + \ln(3+x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right)$$

On connaît le développement en série entière de $u \longmapsto \ln(1-u)$ en 0 : pour tout $u \in]-1; 1[$, $\ln(1-u) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$. Pour $x \in]-2; 2[$, on a $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{x}{3}\right| < 1$, ce qui entraîne

$$f(x) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^n.$$

Notons R le rayon de convergence de la série entière associée au développement ci-dessus. Puisque la série précédente converge pour tout $x \in]-2; 2[$, on sait déjà que $R \geq 2$. On peut utiliser la règle de D'alembert pour les séries entières pour déterminer R ou remarquer que pour $x = 2$,

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^n = \frac{1}{n} + \frac{2^n}{n3^n}$$

est le terme général d'une série divergente puisque la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge et la série $\sum \dfrac{2^n}{n3^n}$ converge. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \dfrac{2^n}{n3^n} \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, et la série géométrique $\sum (2/3)^n$ converge puisque $|2/3| < 1$. Ainsi, $R \leq 2$ ce qui entraîne finalement $R = 2$.

Correction de l'exercice 4

1. Tout d'abord, N est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
   - Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, chacun des termes est nul, on a :

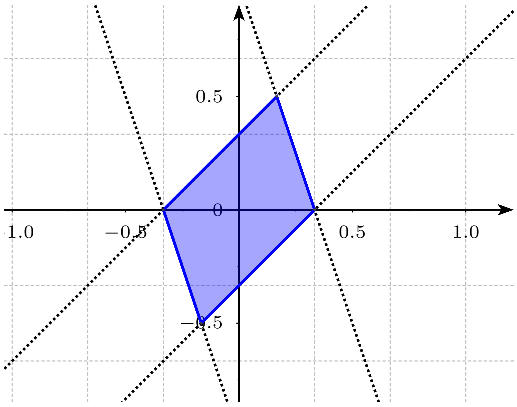
   $$N(x,y) = 0 \iff |3x - y| + 2|y| = 0 \iff \begin{cases} |3x - y| = 0 \\ 2|y| = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

   - Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = |3\lambda x - \lambda y| + 2|\lambda y| = \lambda N(x, y)$.
   - Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, alors par inégalité triangulaire vérifiée par la valeur absolue

   $$\begin{aligned} N((x,y) + (x',y')) &= N(x + x', y + y') \\ &= |3(x + x') - (y + y')| + 2|y + y'| \\ &\leq |3x - y| + |3x' - y'| + 2|y| + 2|y'| = N(x, y) + N(x', y') \end{aligned}$$

   ce qui achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. On sait que $\overline{B}_N((0,0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid N(x, y) \leq 1\}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $3x - y \geq 0$, ce qui équivaut à $y \leq 3x$, et $y \geq 0$, alors $N(x, y) \leq 1 \iff 3x - y + 2y \leq 1 \iff y \leq 1 - 3x$. Si $3x - y \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $N(x, y) \leq 1 \iff 3x - y - 2y \leq 1 \iff x - \dfrac{1}{3} \leq y$. Si $3x - y \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $N(x, y) \leq 1 \iff -(3x - y) + 2y \leq 1 \iff \dfrac{1}{3} + x$. Enfin, si $3x - y \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $N(x, y) \leq 1 \iff -(3x - y) - 2y \leq 1 \iff y \geq -1 - 3x$. Ainsi, la boule fermée unité est la partie (bornée) délimitée par les droites d'équation $y = 1 - 3x$, $y = x - \dfrac{1}{3}$, $y = x + \dfrac{1}{3}$ et $y = -1 - 3x$, ce qui donne



3. On sait qu'une boule B est convexe : pour tout $X, Y \in B$, le segment $[X;Y] = \{(1-t)X + tY \mid t \in [0;1]\}$ est inclus dans B. On remarque d'après le dessin que les points $X = (-0.5; 0.5)$ et $Y = (0.5; 0.5)$ appartiennent à l'ensemble délimité en bleu, alors que le milieu du segment $[X;Y]$, à savoir $(0; 0,5)$, n'appartient pas à cet ensemble. Il ne peut donc pas exister de norme sur $\mathbb{R}^2$ tel que la partie bleue soit la boule unité fermée pour cette norme.

Correction de l'exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1]} f_n(x)$ puisque f_n est à valeurs positives sur $[0;1]$. La fonction f_n est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$,
$$f_n'(x) = n^{3/4}(1 - nx^2)e^{-nx^2/2}$$
qui est du signe de $1 - nx^2$. Par conséquent, f_n est croissante sur $[0; 1/\sqrt{n}]$ et décroissante sur $[1/\sqrt{n}; 1]$, elle atteint donc son maximum en $1/\sqrt{n}$, ce qui entraîne
$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n^{3/4}\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-1/2} = n^{1/4}e^{-1/2}.$$
On remarque que $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Si la suite $(f_n)_n$ convergeait vers une fonction f dans $(E, \|\ \|_\infty)$, la suite $(\|f_n\|)_\infty$ convergerait vers $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ ce qui est impossible. La suite $(f_n)_n$ n'est donc pas convergente dans $(E, \|\ \|_\infty)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\|f_n - 0_E\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^1 n^{3/4}xe^{-nx^2/2} = n^{3/4}\left[-\frac{1}{n}e^{-nx^2/2}\right]_0^1 = \frac{1}{n^{1/4}}(1 - e^{-n/2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
ce qui démontre que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle 0_E dans $(E, \|\ \|_1)$.