Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} 2^n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \pi^{\sqrt{n^2+2n}}x^n$.

Exercice 2. Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n n!}x^n$ d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 3. On considère la fonction réelle $f : x \mapsto f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont f est la fonction somme.
2. Calculer f' sur $]-R,R[$, puis exprimer f' à l'aide de fonctions usuelles.
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in]-R;R[$. En déduire une expression de f sur $]-R,R[$.
4. Démontrer que la série entière associée à f converge normalement sur $[-R,R]$. Que conclure pour la continuité de f ?
5. Montrer que $2+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = \ln(2)+\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de sa base canonique β, on considère l'endomorphisme $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ déterminé par

$$\mathrm{Mat}_\beta(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\ker p$ et une base de $\mathrm{Im}\, p$.
2. Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on donnera une base ou une équation.

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continûement dérivables de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout f et g dans E, par

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\mathrm{d}x + f(0)g(0).$$

1. Montrer que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On considère le sous-espace vectoriel F de E engendré par les fonctions f_0, f_1 et f_2 définies, pour tout x dans $[-1,1]$, par $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$. Donner une base orthonormée de F pour $\langle \cdot,\cdot \rangle$.
3. Pour tous réels a, b et c, on note $g_{a,b,c}$ la fonction définie, pour tout x dans $[-1,1]$, par $g_{a,b,c}(x) = ax^2+bx+c$. Pour quels réels a, b et c la distance de exp à $g_{a,b,c}$ est-elle minimale ?

Exercice 6. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$\begin{cases} x+y+z+t=0, \\ x+2y+3z+4t=0. \end{cases}.$$

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Soit $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$. Calculer $d(\vec{e}_1, F)$.