Partie commune - Devoir n^o 2

Correction de l'exercice 1. Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

On pose $S = a_1 + a_2 + a_3$, $T = a_1 + ja_2 + j^2a_3$, et $U = a_1 + j^2a_2 + ja_3$.

1. Calculer $\det(AV)$ en fonction de $\det(V)$, S, T et U.
2. En déduire $\det(A)$.

Correction de l'exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note B_n le déterminant de la matrice $n \times n$:

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

1. Calculer B_2 et B_3,
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$,
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Correction de l'exercice 3. Pour montrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$ converge, on peut soit montrer qu'elle converge absolument, soit montrer qu'elle correspond à une série alternée. Pour la première approche, on constate que pour $n \geq 2$

$$\Big|\frac{(-1)^n}{n^2-1}\Big| = \frac{1}{n^2-1} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

et donc

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Big|\frac{(-1)^n}{n^2-1}\Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

la convergence étant assurée par le fait que c'est une série de Riemann. Pour l'autre approche, on vérifie que $\frac{(-1)^n}{n^2-1} = (-1)^n v_n$, avec v_n une suite réelle décroissante et convergeant vers 0. Par le théorème des séries alternées, il s'ensuit que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$ converge. Remarquez qu'on ne peut pas vérifier que la série converge absolument par la seconde approche.
Pour le calcul exact de la série, remarquez que

$$\frac{(-1)^n}{n^2-1} = (-1)^n \frac{1}{(n-1)(n+1)} = (-1)^n \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\Big].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1}\Big] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \Big[\sum_{n=0}^{N-2} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1}\Big] = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \Big[1 - \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{N-1}}{N} - \frac{(-1)^N}{N+1}\Big] \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Cet exercice est noté sur 3 points, dont 1 pour la nature de la convergence et 2 pour le calcul de la valeur de la série.

Correction de l'exercice 4. Avant de lire la solution, remarquez qu'une estimation simple de la forme suivante $\left|\frac{\sin(k)\cos(k)}{k\ln(1+k)}\right| \leq \frac{1}{k\ln(1+k)}$ ne permet pas de conclure sur la convergence de la série correspondante. Par ailleurs, faire un développement limité des fonctions $k \mapsto \sin(k)$, $k \mapsto \cos(k)$ ou $k \mapsto \ln(1+k)$ pour k tendant vers l'infini **n'a aucun sens !**
Pour montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)\cos(k)}{k\ln(1+k)}$ converge, on va utiliser la version du théorème d'Abel présentée dans l'exercice 14 de la fiche 2. Pour ce faire, on remarque que $\frac{\sin(k)\cos(k)}{k\ln(1+k)} = u_k v_k$ avec $u_k = \sin(k)\cos(k)$ et $v_k = \frac{1}{k\ln(1+k)}$. Or, la suite $(v_k)_k$ est une suite décroissante, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qui converge vers 0. Pour pouvoir appliquer la version mentionnée du théorème d'Abel, il faut encore vérifier que **les sommes partielles des u_k sont bornées.** Plus précisément, on calcule pour $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} u_k &= \sum_{k=1}^{N} \sin(k)\cos(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \sin(2k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \mathfrak{Im}(e^{i2k}) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\Big(\sum_{k=1}^{N} e^{i2k}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\Big(e^{2i}\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2k}\Big) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\Big(e^{2i}\frac{1-e^{i2N}}{1-e^{i2}}\Big).\end{aligned}$$

De l'estimation $|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$, valable pour tout nombre complexe z, on déduit la majoration

$$\Big|\sum_{k=1}^{N} u_k\Big| = \frac{1}{2}\Big|\mathfrak{Im}\Big(e^{2i}\frac{1-e^{i2N}}{1-e^{i2}}\Big)\Big| \leq \frac{1}{2}\Big|e^{2i}\frac{1-e^{i2N}}{1-e^{i2}}\Big| \leq \frac{1}{2}\frac{1+|e^{i2N}|}{|1-e^{i2}|} \leq \frac{1}{|1-e^{i2}|}.$$

Comme $\frac{1}{|1-e^{i2}|}$ est indépendant de N on en déduit bien que les sommes partielles $\big|\sum_{k=1}^{N} u_k\big|$ sont majorées par une constante indépendante de N. Le théorème d'Abel peut donc s'appliquer, et il en découle que la série converge. Attention, on ne peut pas conclure si elle converge absolument ou pas.
Cet exercice est noté sur 3 points, dont 1/2 pour la mention du théorème d'Abel, et 1/2 pour une bonne présentation des conditions à vérifier.

Correction de l'exercice 5. Avant même d'entrer dans les subtilités de cet exercice, on pouvait constater que pour $n \geq 1$, on a $|1 + \frac{(-1)^n}{n^a}| \leq 2$, d'où l'on déduit

$$|u_n| = \left|\frac{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^a}} - 1}{n^a}\right| \leq \frac{\sqrt{2}+1}{n^a}.$$

Pour $a > 1$, la série dont le terme général est u_n est donc absolument convergente (c'était le cas facile).
Pour étudier la série avec $a \in (1/4, 1]$, il faut utiliser un développement limité de l'expression $\sqrt{1+\varepsilon}$ pour ε proche de 0. En effet, ce développement limité se justifie car $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est proche de 0 pour n suffisamment grand, quelque soit $a > 0$. On a alors

$$u_n = \frac{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^a}} - 1}{n^a} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n^{2a}} - \frac{1}{8}\frac{1}{n^{3a}} + O\big(\frac{1}{n^{4a}}\big).$$

Remarquez qu'on a utilisé le fait que $\frac{1}{n^a}O\big(\frac{1}{n^{3a}}\big) = O\big(\frac{1}{n^{4a}}\big)$.
Or, pour tout $a > 0$, le terme général $\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n^{2a}}$ définit une série alternée qui converge. Pour $\alpha > 1/3$, le terme général $-\frac{1}{8}\frac{1}{n^{3a}}$ définit une série de Riemann qui converge, alors que pour $\alpha \leq 1/3$, ce terme définit une série de Riemann divergente. Finalement, pour $a > 1/4$, le terme général $O\big(\frac{1}{n^{4a}}\big)$ définit une série convergente par le théorème de comparaison. Ainsi, on en conclut que pour $a > 1/3$, la série $\sum_{n_1}^{\infty} u_n$ peut être récrite comme la somme de 3 séries convergentes, et donc converge. Pour $a \leq 1/3$, la série $\sum_{n_1}^{\infty} u_n$ peut être récrite comme la somme de 2 séries convergentes et d'une série divergente, et donc elle est une série divergente. Remarquez que pour $\alpha \leq 1/4$, on ne peut rien conclure sur la convergence ou non de la série, il faudrait aller plus loin dans le développement limité.
Cet exercice est noté sur 4 points, dont 1 point pour l'argument facile $a > 1$, et 3 points pour un développement limité correct et la discussion des différents cas.