Partie CCP - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Notations et objectifs

Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$ et I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pourra confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.
Une matrice N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel r tel que $N^r = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$.
Si $M_1, \dots, M_k$ sont des matrices carrées, la matrice $\text{diag}(M_1, ..., M_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $M_1, \dots, M_k$.
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note Id_E l'application identité sur E.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est **toute-puissante** sur $\mathbb{K}$ et on notera en abrégé TP$\mathbb{K}$ si, pour tout $n \in N^*$, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$.
On note $T_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$:

$$T_p(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A = B^n\}.$$

L'objectif principal du sujet est d'établir le résultat suivant : toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP$\mathbb{C}$.
Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties précédentes.

I. Quelques exemples

1. Le cas de la taille 1 :
   (a) Démontrer que $T_1(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$.
   (b) i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner les racines n-ièmes du nombre complexe b, c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^n = b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   ii. En déduire $T_1(\mathbb{C})$.
2. Une condition nécessaire...
   (a) Démontrer que si $A \in T_p(\mathbb{K})$, alors $\det(A) \in T_1(\mathbb{K})$.
   (b) En déduire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas TP$\mathbb{R}$.
3. ... mais pas suffisante :
   (a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il n'existe aucune matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
   (b) En déduire que la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante.
4. Le cas des matrices nilpotentes : Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

(a) Notons $k = \min\{l \in \mathbb{N} \mid N^l = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}\}$. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que la famille $(X, NX, \dots, N^{k-1}X)$ est libre.

(b) En déduire que $N^p = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$.

(c) Démontrer que si N est TP$\mathbb{K}$, alors N est la matrice nulle.

II. Le cas où le polynôme caractéristique est scindé

On rappelle que si $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j \in \mathbb{K}[X]$, $w \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$ et $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on peut définir l'endomorphisme $P(w)$ par $P(w) = \sum_{j=0}^{d} a_j w^j$ et la matrice $P(M)$ par $P(M) = \sum_{j=0}^{d} a_j M^j$.

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique, noté χ_A, est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme :

$$\chi_A = (-1)^p \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i} \qquad \text{avec } k, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ les valeurs propres de } A.$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont A est la matrice dans $\mathcal{B}$. Enfin, pour $i \in [\![1;p]\!]$, on note $C_i = \mathrm{Ker}((u - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i})$ que l'on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i. On **admet** que $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$.

5. (a) Soient v un endomophisme de $\mathbb{K}^p$ qui commute avec u et Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(Q(u))$ est stable par v.

   (b) En déduire que pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, le sous-espace caractéristique C_i est stable par u. On note ainsi u_{C_i} l'endomorphisme induit par u sur C_i.

6. Soit $i \in [\![1;k]\!]$. Justifier que l'application $u_{C_i} - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{C_i}$ est un endomorphisme de C_i nilpotent.

7. (a) Justifier l'existence d'une base de $\mathbb{K}^p$ adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$.

   (b) Déduire de la question 6 que la matrice A peut s'écrire sous la forme

$$A = P\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)P^{-1} \quad \text{où} \quad \begin{cases} P \text{ est une matrice inversible de } \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \\ p_i = \dim(C_i), \\ N_i \text{ est une matrice nilpotente de } \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K}). \end{cases}$$

8. (a) Soient $M_1, \dots, M_k$ des matrices carrées et $A' = \mathrm{diag}(M_1, \dots, M_k) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ (où $m \in \mathbb{N}^*, m \geq k$). Montrer que pour tout $R \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inversible, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(RA'R^{-1})^n = R\mathrm{diag}(M_1^n, \dots, M_k^n)R^{-1}$.

   (b) Démontrer que si, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP$\mathbb{K}$, alors A est elle-même TP$\mathbb{K}$.

III. Le cas des matrices unipotentes

Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Nous allons montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$. On pourra confondre dans la suite un polynôme avec sa fonction polynômiale.

9. Une application des développements limités

   (a) Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0. Démontrer, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p \times Q$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

      i. Écrire le développement limité de $(1+x)^{1/n}$ à l'ordre p au voisinage de 0.

ii. En déduire l'existence d'un polynôme $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait, au voisinage de 0 :

$$1 + x = (U(x))^n + o(x^p).$$

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $1 + X = U^n + X^p \times Q$.

10. Applications :

(a) Démontrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. En déduire que si λ est TP$\mathbb{K}$, la matrice $\lambda I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

11. Le résultat annoncé :

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice inversible.

i. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de A.

ii. Justifier le fait que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$.

iii. Montrer que A est TP$\mathbb{C}$.

(b) Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est-elle TP$\mathbb{C}$?

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie CCP

I. Quelques exemples

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Supposons que a est TP$\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a = b^n$. En particulier, pour $n = 2$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a = b^2$, donc $a \geq 0$. Réciproquement, si $a \in [0; +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto x^n$ est bijective de $[0; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$ (car strictement croissante), donc il existe $b \in [0; +\infty[$ ($b = a^{1/n}$) tel que $a = b^n$. Ainsi, $T_1(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$.

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'ensemble des racines n-ièmes de b est donné par $\left\{r^{1/n}e^{i(\theta/n+2k\pi/n)} \mid k \in [\![0; n-1]\!]\right\}$.

   (b) Soit $a \in \mathbb{C}$. Si $a = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a = 0^n$, donc $a \in T_1(\mathbb{C})$. Sinon, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = re^{i\theta}$. La question précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_n = r^{1/n}e^{i\theta/n} \in \mathbb{C}$ vérifiant $a = z_n^n$, ce qui démontre que $a \in T_1(\mathbb{C})$. Par conséquent, $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

3. (a) Supposons que $A \in T_p(\mathbb{K})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$. Puisque le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants, cela entraîne $\det(A) = (\det(B))^n$ avec $\det(B) \in \mathbb{K}$ puisque B est à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $b \in \mathbb{K}$ tel que $\det(A) = b^n$, donc $\det(A) \in T_1(\mathbb{K})$.

   (b) Il suffit de construire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant strictement négatif, par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de déterminant $-1 < 0$.

4. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Supposons par l'absurde qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A = B^2$. On obtient alors

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} a^2+bc=-1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=-2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=-d \\ a^2+bc=-1 \\ a^2+bc=-2 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} b=0 \\ c=0 \\ a^2=-1 \\ d^2=-2 \end{array}\right.$$

   Les deux systèmes apparaissant donnant lieu à des contradictions ($-1 = -2$ dans le premier cas, un carré réel négatif dans le deuxième cas), il est impossible de trouver une telle matrice B.

   (b) On a démontré qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant $2 \in T_1(\mathbb{R})$ telle qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A = B^2$, ce qui prouve que $A \notin T_2(\mathbb{R})$. Par suite, la condition nécessaire trouveé ci-dessus n'est pas suffisante.

5. Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

   (a) On a noté $k = \min\{l \in \mathbb{N} \mid N^l = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}\}$. Puisque $N^{k-1} = 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $N^{k-1}X \neq 0$. Montrons que la famille $(X, NX, \ldots, N^{k-1}X)$ est une famille libre. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{K}$ telle que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} N^iX = 0$. En multipliant cette égalité à gauche par N^{k-1}, on obtient $\lambda_0 N^{k-1}X + \lambda_1 N^k X + \cdots + \lambda_{k-1}N^{2k-2}X = 0$ ce qui équivaut à $\lambda_0 N^{k-1}X = 0$ puisque toutes les puissances N^m avec $m \geq k$ sont nulles. Puisque $N^{k-1}X \neq 0$, on en déduit que $\lambda_0 = 0$. En réitérant le processus, on démontre que $\lambda_i = 0$ pour tout i, donc la famille $(X, NX, \ldots, N^{k-1}X)$ est libre.

   (b) Puisque la famille $(X, NX, \ldots, N^{k-1}X)$ est une famille libre de k vecteurs dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui est dimension p, on obtient $k \leq p$. Par suite, comme $p - k \geq 0$, on peut écrire$N^p = N^{p-k}N^k = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$.

(c) Supposons que N est TP$\mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $N = B^n$. En particulier, pour $n = p$, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $N = B^p$, ce qui implique $N^p = B^{p^2} = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$. La matrice B est donc nilpotente, dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et la question précédente démontre que $B^p = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$, et ainsi $N = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$.

II. Le cas où le polynôme caractéristique est scindé

5. (a) Notons $Q = \sum_{i=0}^{d} q_i X^i$ avec $d \in \mathbb{N}$, $q_i \in \mathbb{K}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(Q(u))$, on a alors

$$\begin{aligned} Q(u)(v(x)) &= \sum_{i=0}^{d} q_i u^i(v(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{d} q_i v(u^i(x)) \text{ car } u \text{ et } v \text{ commutent} \\ &= v\left(\sum_{i=0}^{d} q_i u^i(x)\right) \text{ par linéarité de } v \\ &= v(Q(u)(x)) \\ &= v(0_{\mathbb{K}^p}) \text{ puisque } x \in \mathrm{Ker}(Q(u)) \\ &= 0_{\mathbb{K}^p}. \end{aligned}$$

Ainsi, $v(\mathrm{Ker}(Q(u))) \subset Ker(Q(u))$ donc $\mathrm{Ker}(Q(u))$ est stable par v.

(b) Soit $i \in [\![1;k]\!]$. Comme on peut écrire $C_i = \mathrm{Ker}(Q_i(u))$ avec $Q_i = (X - \lambda_i)^{r_i} \in \mathbb{K}[X]$ et comme u commute avec lui-même, la question précédente entraîne directement que C_i est stable par u.

6. Soit $i \in [\![1;k]\!]$. Pour tout $x \in C_i$, on a $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}(x) = 0_{\mathbb{K}^p}$ donc $(u_{C_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i})^{r_i}(x) = 0$, ce qui montre que l'application $(u_{C_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i})^{r_i}$ est nulle (sur C_i). Ainsi, $u_{C_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$ est un endomorphisme nilpotent de C_i.

7. (a) Puisqu'on a la décomposition de $\mathbb{K}^p$ en somme directe $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$, on peut choisir pour tout $i \in [\![1;k]\!]$ une base $\mathcal{B}_i$ de C_i et concaténer ces bases entre elles de manière à obtenir une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^p$ que l'on appelle base adaptée à la décomposition.

(b) Soit $i \in [\![1;k]\!]$. Notons $n_i = u_{C_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_i}$ qui est un endomorphisme nilpotent de C_i. Dans la base $\mathcal{B}_i$ (avec les notations précédentes), la matrice $N_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(n_i)$ est nilpotente, et la matrice de u restreinte à C_i dans la base $\mathcal{B}_i$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_{|C_i}) = \lambda_i I_{p_i} + N_i$, où $p_i = \dim(C_i)$. Dans la base $\mathcal{B}'$ concaténée des $\mathcal{B}_i$, on trouve alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{p_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{p_2} + N_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k I_{p_k} + N_k \end{pmatrix} := M.$$

Puisque A est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$, la formule de changement de base entraîne $A = PMP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, donc P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

8. (a) Soit $R \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inversible, on a $(RA'R^{-1})^2 = RA'R^{-1}RA'R^{-1} = R(A')^2R^{-1}$ puisque $R^{-1}R = I_m$. Par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}*$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(RA'R^{-1})^n = R(A')^nR^{-1}$.

De plus, la formule de calcul par bloc d'une matrice diagonale par bloc donne aussi par récurrence immédiate $\mathrm{diag}(M_1, \dots, M_m)^n = \mathrm{diag}(M_1^n, \dots, M_m^n)$ ce qui donne le résultat voulu en remplaçant dans $(A')^n$.

(b) Supposons que pour tout $i \in [\![1; k]\!]$, la matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP$\mathbb{K}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ tel que $\lambda_i I_{p_i} + N_i = B_i^n$. Posons alors $N = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_k)$ et $M' = PNP^{-1} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On remarque que

$$M'^n = (PNP^{-1})^n = P\mathrm{diag}(B_1^n, \dots, B_k^n)P^{-1} = P\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)P^{-1} = A$$

ce qui démontre que A est TP$\mathbb{K}$.

III. Le cas des matrices unipotentes

9. (a) Soit $V \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0. Effectuons la division euclidienne de V par X^p. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$V = X^p \times Q + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(X^p) = p.$$

Puisque l'on peut écrire $V(x) = \varepsilon(x)x^p$ au voisinage de 0 avec $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient par conséquent, toujours au voisinage de 0 : $R(x) = x^p(\varepsilon(x) - Q(x))$ avec $\varepsilon(x) - Q(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -Q(0)$. Par suite, $R(x) = o(x^p)$ en 0 si $Q(0) \neq 0$ et $R(x) \underset{0}{\sim} -Q(0)x^p$ si $Q(0) \neq 0$. Supposons par l'absurde que R n'est pas le polynôme nul, $R = \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$. En notant $a_{i_0} = \min\{a_i \mid a_i \neq 0\}$, on a $R(x) \underset{0}{\sim} a_{i_0} x^{i_0}$ avec $i_0 < p$, ce qui est absurde dans les deux cas puisque $\left| \dfrac{a_{i_0} x^{i_0}}{x^p} \right| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ce qui prouve que $V = X^p \times Q$.

(b) i. On a $(1+x)^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}x + \left(\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)\right) \times \dfrac{1}{2!}x^2 + \left(\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\dfrac{1}{n} - (p-1)\right)\right) \dfrac{1}{p!}x^p + o(x^p)$ lorsque $x \to 0$.

ii. Posons $U = 1 + \dfrac{1}{n}X + \left(\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)\right) \times \dfrac{1}{2!}X^2 + \left(\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\dfrac{1}{n} - (p-1)\right)\right) \dfrac{1}{p!}X^p \in \mathbb{R}[X]$. Alors on a lorsque x tend vers 0 :

$$\begin{aligned} 1 + x &= (U(x) + o(x^p))^n \\ &= (U(x))^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{n} (U(x))^{n-k} o(x^{kp}) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (U(x))^{n-k} o(x^{kp})}{x^p} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(U(x))^{n-k}}_{\to 1} \underbrace{o(x^k)}_{\to 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui donne $1 + x = (U(x))^n + o(x^p)$ lorsque $x \to 0$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $V = 1 + X - U^n$, alors $V \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0. D'après la question 9a, il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p \times Q$ ce qui implique $1 + X = U^n + X^p \times Q$.

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question 9c, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = U^n + X^p \times Q$. En évaluant ceci en la matrice N, on obtient alors $I_p + N = (U(N))^n + N^p \times Q(N)$. Or on a vu à la question 4b qu'alors $N^p = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$, ce qui entraîne $I_p + N = (U(N))^n$ avec $U(N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Ainsi, $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, λ non nul. Supposons λ TP$\mathbb{K}$. On peut écrire $\lambda I_p + N = \lambda \left(I_p + \dfrac{1}{\lambda} N \right)$ avec $\dfrac{1}{\lambda} N$ nilpotente puisque N l'est. La question 10a implique que la matrice $I_p + \dfrac{1}{\lambda} N$ est TP$\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant $I_p + \dfrac{1}{\lambda} N = B^n$. Comme λ est aussi TP$\mathbb{K}$, il existe $b \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda = b^n$, d'où $\lambda I_p + N = b^n B^n = (bB)^n$ avec $bB \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, ce qui prouve que $\lambda I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ inversible.

(a) i. Puisque A est inversible, si l'on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont A est la matrice dans la base canonique, on a u bijectif donc u injectif, ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u - 0\,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^p}) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$. Par conséquent, 0 n'est pas valeur propre de u, c'est-à-dire que 0 n'est pas valeur propre de A.

ii. Puisque A est à coefficients complexes, le polynôme caractéristique de A est un polynôme (de degré p) à coefficients complexes, donc il est scindé sur $\mathbb{C}$.

iii. On peut donc appliquer les résultats de la partie II. On sait que si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de A, il existe $N_1, \dots, N_k$ nilpotentes telles que $A = P \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1}$. Comme 0 n'est pas valeur propre de A, pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ est non nul, donc la question 10b démontre que chacune des matrices $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP$\mathbb{C}$. On conclut ensuite à l'aide de 8b que A est TP$\mathbb{C}$.

(b) On a vu que si N est nilpotente non nulle, alors N n'est pas TP$\mathbb{C}$. Il suffit donc de considérer la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ pour démontrer qu'il existe des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ non TP$\mathbb{C}$.