Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Math IV - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice 1.

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul et on note : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace. I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Enfin, on note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices M vérifiant ${}^tMM = I_n$.

1. Un produit scalaire sur l'espace des matrices réelles :

   Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ en fonction des coefficients de A.

   (b) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$.

2. Ensemble des matrices orthogonales :

   (a) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Quelle(s) valeur(s) peut prendre le déterminant de A ?

   (b) $O_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?

   (c) $O_n(\mathbb{R})$ est-il une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme de Schur ?

   (d) Répondre à la même question pour une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Étude d'une série de fonctions

Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$. Le but du problème est d'établir les différents modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$, puis d'en étudier sa somme que l'on notera f, c'est-à-dire :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}.$$

I. Résultat préliminaire

1. *Une inégalité classique* : Quelle propriété de la fonction exponentielle permet de justifier que sa courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 ?

   En déduire une inégalité très classique qui traduise cette propriété géométrique.

2. En déduire que pour tout réel $u > 0$, on a $e^{-u} \leq \dfrac{1}{u}$.

II. Modes de convergence de la série de fonctions

3. Pour $x \geq 0$ fixé, démontrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$ converge.

4. Soit $x < 0$, donner la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$.

   La fonction f est donc définie sur $[0; +\infty[$.

5. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0; +\infty[$. En déduire que la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$.

6. Soit $a > 0$, démontrer que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

7. En déduire **avec soin** que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une somme pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

8. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge-t-elle normalement sur $]0; +\infty[$?

9. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge-t-elle uniformément sur $]0; +\infty[$?

III. Équivalent de f au voisinage de $+\infty$

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer un équivalent simple de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

10. Pour $x > 0$, démontrer, en justifiant avec soin, que l'on a $f(x) \leq \displaystyle\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

    En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

11. On pose, pour $x > 0$:

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-x(\sqrt{n}-1)}}{n\sqrt{n}}.$$

    (a) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$.

    (b) Soit $x > 0$, exprimer $f(x)e^x$ à l'aide de $\psi(x)$. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie CCP

Correction de l'exercice :

1. (a) Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, le coefficient (i, j) de la matrice ${}^tAA$ est donné par la formule :
$$({}^tAA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j}$$
ainsi le coefficient (i, i) vaut $({}^tAA)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2$. Donc on obtient
$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2,$$
c'est-à-dire $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ est la somme des carrés des coefficients de A.

   (b) On a $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. La linéarité à gauche provient de la linéarité de la transposée et de la trace. Puisque pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}({}^tM)$, la symétrie s'obtient aussi facilement et implique la bilinéarité. Enfin, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geq 0$ et il y a égalité si et seulement si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$, ce qui équivaut à $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. La forme $\langle\ ,\ \rangle$ est donc définie positive. Ainsi, elle définit bien un produit scalaire sur E.

2. (a) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors on a ${}^tAA = I_n$, donc en prenant le déterminant de cette expression, $\det({}^tAA) = \det(I_n) = 1$. Or le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, ce qui donne finalement $\det(A)^2 = 1$ et ainsi $\det(A) \in \{\pm 1\}$.

   (b) La matrice nulle n'est pas orthogonale puisque son déterminant est égal à 0, donc $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel.

   (c) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$. Ainsi, pour tout $A \in {}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\| \leq \sqrt{n}$ donc $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme de Schur.

   (d) Puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2 < +\infty$, on sait que toutes les normes sont équivalentes. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $C > 0$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(M) \leq C\|M\|$. En particulier, pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a $N(A) \leq C\|A\| \leq C\sqrt{n}$, donc $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelle que soit la norme que l'on considère.

Correction du problème :

Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$.

I. Résultat préliminaire

1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée seconde elle-même qui est toujours à valeurs positives. Donc en tout point, sa courbe est au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

   Au point d'abscisse 0, la tangente à la courbe a pour équation $y = (\exp)'(0)(x - 0) - \exp(0)$ c'est-à-dire $y = x + 1$. On trouve donc que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u \geq u + 1$.

2. Soit $u > 0$, on sait d'après la question précédente que $e^u \geq u + 1 \geq u$ donc $\dfrac{1}{e^u} \leq \dfrac{1}{u}$ par décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui donne $e^{-u} \leq \dfrac{1}{u}$.

II. Modes de convergence de la série de fonctions

3. Soit $x \geq 0$ fixé. Pur tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann d'exposant > 1 donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$ converge.

4. Soit $x < 0$. Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}} = +\infty$ donc le terme général de la série numérique $\sum \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. Par conséquent, la série $\sum \dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.

   On en déduit que le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ est $\mathbb{R}^+$ et que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, donc $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+}$ converge et ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

   Comme pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que l'on vient de démontrer que $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$, le théorème de continuité pour les séries de fonctions implique que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

6. Soit $a > 0$. Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [a; +\infty[$, par décroissance de la fonction $t \longmapsto e^{-t\sqrt{n}}$, on a $|f_n'(x)| \leq \dfrac{e^{-a\sqrt{n}}}{n}$. Par suite, comme le sup est le plus petit des majorants, on en déduit que $\|f_n'\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \dfrac{e^{-a\sqrt{n}}}{n}$. De plus, par croissance comparée, on a $n^2\dfrac{e^{-a\sqrt{n}}}{n} = ne^{-a\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $a > 0$, ce qui implique que $\dfrac{e^{-a\sqrt{n}}}{n} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est asolument convergente, la série $\sum \|f_n'\|_{\infty,[a;+\infty[}$ converge et ainsi, $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

7. Soit $a > 0$. On a vu que :
   - pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$,
   - $\sum f_n$ converge simplement sur $[a; +\infty[$,
   - $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a; +\infty[$,

   donc d'après le théorème de dérivation pour les séries de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$, et pour tout $x \in [a; +\infty[$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$. Puisque ceci est valable pour tout $a > 0$, on trouve finalement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

8. Posons pour tout $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Alors on a $x_n \in]0; +\infty[$ pour tout $n \geq 1$. En outre, pour tout $n \geq 1$, $\|f_n'\|_{\infty,]0;+\infty[} \geq |f_n'(x_n)| = \dfrac{e^{-\sqrt{n}/\sqrt{n}}}{n} = \dfrac{e^{-1}}{n}$. Comme $\sum \dfrac{e^{-1}}{n}$ est une série de Riemann divergente, par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \|f_n'\|_{\infty,]0;+\infty[}$ diverge, donc la série $\sum f_n'$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$.

9. On sait que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $]0; +\infty[$ si et seulement la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur $]0; +\infty[$ vers la fonction nulle, où pour tout x, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_n'(x)$. Posons pour tout $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Alors $x_n \in]0; +\infty[$ pour tout $n \geq 1$, donc $\|R_n\|_{\infty,]0;+\infty[} \geq |R_n(x_n)|$. Or pour

tout $n \geq 1$ on a

$$|R_n(x_n)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{e^{-x_n\sqrt{k}}}{k} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}/\sqrt{n}}}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-\sqrt{k}/\sqrt{n}}}{k}$$

car les termes sous la somme sont tous positifs. De plus, pour $k \in [\![n+1; 2n]\!]$, on a $-\sqrt{k} \geq -\sqrt{2n}$ et $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$, d'où la minoration

$$\|R_n\|_{\infty,]0;+\infty[} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-\sqrt{2n}/\sqrt{n}}}{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2n} = n\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2n} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2} > 0.$$

Par conséquent, $\|R_n\|_{\infty,]0;+\infty[}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, don la série de fonctions $\sum f_n'$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$.

III. Équivalent de f au voisinage de $+\infty$

10. Soit $x > 0$, d'après la partie I, on a $e^{-x\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{x\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\dfrac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{xn^2}$ pour tout $n \geq 1$. Soit $N \geq 1$, on a alors

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{xn^2} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

Comme les deux séries concernées convergent, on peut passer à la limite quand N tend vers $+\infty$ pour obtenir $f(x) \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}$ (on verra que ceci vaut en réalité $\dfrac{\pi^2}{6}$) et $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. De plus, pour tout $x \geq 1$, pour tout $x > 0$, $f_n(x) \geq 0$ donc on a l'encadrement

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et le théorème des gendarmes implique que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

11. On pose, pour $x > 0$, $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-x(\sqrt{n}-1)}}{n\sqrt{n}}$.

(a) Posons, pour tout $n \geq 2$, $g_n : x \longmapsto \dfrac{e^{-x(\sqrt{n}-1)}}{n\sqrt{n}}$.

- L'infini est un point adhérent de $[0; +\infty[$.
- Pour tout $n \geq 2$, $\sqrt{n} - 1 > 0$, donc $-x(\sqrt{n} - 1)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ $(\forall n \geq 2)$.
- Montrons que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$, on a $|g_n(x)| \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ donc $\|g_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, et ainsi $\sum \|g_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+}$ converge. La série $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0; +\infty[$. On peut donc appliquer le théorème d'interversion limite et série et on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0.$$

(b) Soit $x > 0$, on a

$$f(x)e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}+x}}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x(\sqrt{n}-1)}}{n\sqrt{n}} = \psi(x) + \frac{e^0}{1\sqrt{1}} = \psi(x) + 1.$$

Par suite, $f(x)e^x$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$.