Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2013-2014
Math III - PMI — Durée : 1 heure et trente minutes

Devoir numéro 2

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**. *Les exercices sont indépendants.*

Questions. Soient C_1, C_2, C_3, C_4, quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Donner une courte motivation pour chaque réponse.

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $\det(2C_1 + 3C_2, C_2, C_3, C_4) = 6\det(C_1, C_2, C_3, C_4)$.
$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ Si $C_1 + C_2 = C_3 + C_4$, alors $\det(C_1, C_2, C_3, C_4) = 0$.
$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $\det(2C_1 + 3C_2, C_2, C_3, 2C_4 - 3C_3) = 4\det(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

Exercice 1. Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
   Indication : Développer par rapport à une colonne convenable pour obtenir Δ_{n-1} et un autre déterminant facile à calculer.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $\quad \Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det(A) + \det(X). \qquad (*)$$

Le but de l'exercice est montrer que $A = 0$.

1. Montrer que $\det(A) = 0$. Indication : on pourra poser $X = A$ dans $(*)$.
2. En déduire que $r = \text{rang}(A) < n$.
3. En utilisant un théorème d'algèbre linéaire, expliquer pourquoi on peut écrire $A = QJ_rP$, avec P, Q inversibles et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$.
   Notation : I_r est la matrice identité de taille n, et O_{n-r} est la matrice nulle de taille $n - r$.
4. Posons $X_0 = QJ'_rP$, où $J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$. Calculer $A + X_0$ et en déduire qu'il s'agit d'une matrice inversible.
5. Calculer $\det(A + X_0)$ à l'aide de l'équation $(*)$, et en déduire que J'_r est la matrice identité.
6. Conclure que $A = 0$.

Exercice 3. Etudier la nature des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} U_n$ avec $U_n = a^n \left(\frac{2\,n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right)^n \quad \forall\, a \in \mathbb{C}$.

2. $\sum_{n\geq 0} U_n$ avec $U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k\, sin(k)}{k^4 + 2\,k^3\, sin(k) + 9}$

   (indication : on pourra utiliser le fait que $sin(x) \geq -1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$).

Exercice 4.

1. Etudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général

$$U_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)}.$$

2. a) Etudier la nature de l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx.$$

   b) En déduire la nature de la série de terme général

$$U_n = \frac{\exp(-n)}{\sqrt{n}}$$