Correction DS2 Partie Analyse

Exercice 3

a. On a $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leq 0$ pour tout $n \geq 2$ et $|u_n| = -u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$.
Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente alors $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ est aussi convergente càd $\sum_{n\geq 2} u_n$ est absolument convergente et donc en particulier convergente.

b. On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{\ln(n)\ln(n)}} = \mathrm{e}^{n-\ln^2(n)} = \mathrm{e}^{n(1-\frac{\ln^2(n)}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Comme $\lim_n u_n \neq 0$ alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est grossièrement divergente.

c. On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ car $\frac{\pi}{2^n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $n \geq 1$ et sinus et cosinus sont positifs sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, on a

$$0 \leq u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2 \frac{\pi}{2^n} =: v_n$$

car $\tan(u) \underset{0}{\sim} u$.
On a $n^2 v_n = \pi \frac{n^4}{\mathrm{e}^{n\ln 2}} \to 0$ par croissance comparée.
Par suite $v_n \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2})$.
Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente alors $\sum_n v_n$ est aussi convergente et par suite $\sum_{n\geq 1} u_n$ est (absolument) convergente.
On aurait pu aussi utiliser la règle de d'Alembert pour montrer que $\sum_n v_n$ est convergente. En effet

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{2^n}{2^{(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Comme $l = \frac{1}{2} < 1$ alors $\sum_n v_n$ est convergente.

d. Cette série n'est pas absolument convergente car

$$|u_n| = \frac{1}{n + \sin(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1$). Par suite $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est aussi divergente.
La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée car $n + \sin(n) \geq n - 1 \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $u_n u_{n+1} \leq 0$ pour tout $n \geq 1$.
On a de plus $|u_n| = \frac{1}{n+\sin(n)} \leq \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Montrons que $(|u_n|)_{n\geq 1} = (\frac{1}{n+\sin n})_{n\geq 1}$ est décroissante.
Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+\sin x}$. On a f est dérivable sur $[1, +\infty[$ avec pour tout $x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{-\cos(x) - 1}{(\sin x + x)^2}.$$

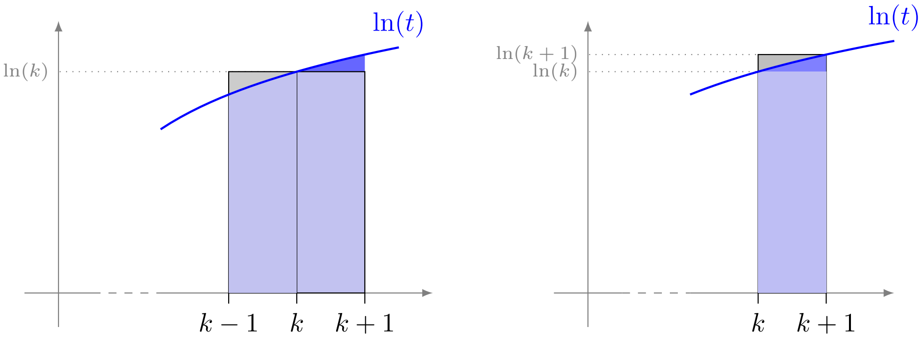

FIGURE 1 – Comparaison de $\ln(k)$ et des intégrales $\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\cos x - 1 \leq 1 - 1 = 0$ et donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 1$.
La fonction f est donc décroissante sur $[1, +\infty[$ et donc la suite $(\frac{1}{n+\sin(n)})_n$ est décroissante.
Par suite, d'après le critère de convergence des séries alternées, la série $\sum_n u_n$ converge et donc elle est semi-convergente.

Exercice 4
On applique le développement limité de e^x en 0 à $\frac{1}{n}$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \\ &\underset{+\infty}{=} (1-a) + \frac{(1-b)}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &\underset{+\infty}{=} (1-a) + \frac{(1-b)}{n} + O(\frac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

1. Si $a \neq 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - a \neq 0$ et la série diverge grossièrement.
2. Si $a = 1$ et $b \neq 1$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-b}{n}$ et la série diverge.
3. Si $a = 1$ et $b = 1$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} O(\frac{1}{n^2})$ et la série converge absolument.

Exercice 5

1. a) On a $\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times \cdots \times n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$ car $\ln(1) = 0$.

   b) Il s'agit de comparer une série et une intégrale, voir la figure 1.
   Ébauche de première solution. Comme la fonction ln est croissante, on a d'après le graphe [1] pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

   En sommant cette inégalité de k allant de 2 à n on trouve

$$\int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \ln(n!) \leq \int_{2}^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

   Deuxième solution pour obtenir (1) : Pour $k \geq 2$ et pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\ln(k) \leq \ln(t) \leq \ln(k+1).$$

   En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient

$$\ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \ln(k+1).$$

1. Il faudrait écrire des inégalités sur le modèle de la deuxième solution ci-dessous.

En sommant l'inégalité de gauche de $k = 2$ à n et celle de droite de $k = 1$ à $n - 1$, on obtient (1).
Une primitive de $\ln(x)$ étant donnée par $x\ln(x) - x$ (par intégration par parties), on obtient dans (1)

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2 \tag{2}$$

avec

$$n\ln(n) - n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n) \tag{3}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\ln(n) - n + 1}{n\ln(n)} = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 1$.
De même

$$(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2 \underset{+\infty}{\sim} n\ln n \tag{4}$$

car

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n\ln n}{n\ln n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

où on a utilisé le fait que $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$;

$$\frac{-(n+1) - 2\ln 2 + 2}{n\ln n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-n}{n\ln n} = \frac{-1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2}{n\ln n} = 1.$$

Par suite, d'après (2), (3), (4), on déduit que $\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

2. D'après 1.b), $u_n = \frac{1}{v_n} \sim \frac{1}{n\ln(n)} =: w_n$.

   On va donc étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2} w_n$ pour déduire celle de $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$.

   On considère la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$. La fonction f est positive, continue. Montrons que f est décroissante. On a f est dérivable sur $[2, +\infty[$ avec

$$f'(x) = \frac{-\ln(x) - 1}{x^2\ln^2 x} \leq 0$$

   pour tout $x \geq 2$ car $\ln(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$.

   Par suite d'après le théorème de comparaison de séries et intégrale, $\sum\limits_{n\geq 2} w_n = \sum\limits_{n\geq 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.
   Comme $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X\to+\infty} \ln(\ln(X)) - \ln(\ln 2) = +\infty$ donc divergente (sinon dire que c'est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$ donc divergente au voisinage de $+\infty$) alors $\sum\limits_{n\geq 2} w_n$ l'est aussi.

   Par suite $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ est divergente.