Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre de printemps 2021-2022

Math IV - Cursus préparatoire 2A | Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ALGÈBRE

Exercice 1. On note $E = \mathbb{R}[X]$ que l'on munit du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n et en déduire que $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de $\langle X^p, X^q \rangle$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$.
3. On considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{1, X, X^2\}$. Déterminer une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$ de F telle que e_1 soit colinéaire à X, et $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} = \mathrm{Vect}\{X, 1\}$.
4. Calculer explicitement $p_F(X^3)$, le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Exprimer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ comme le carré d'une norme que l'on ne demande pas de calculer.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant la relation $(*)$ suivante :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0.$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire dont est muni E.

1. Montrer que l'adjoint de u est égal à $-u$ (on pensera à appliquer $(*)$ sur un vecteur de la forme $x + y$).
2. Déterminer l'ensemble des endomorphismes symétriques de E vérifiant la relation $(*)$.

Exercice 3.

1. Déterminer les rayons de convergence respectifs notés R_1 et R_2 des séries entières suivantes :
   (a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}z^{3n}$,
   (b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) z^n$.
2. Calculer explicitement la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}z^{3n}$ pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_1$.

Exercice 4. On s'intéresse aux fonctions sommes des séries entières solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad x(x-1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0.$$

1. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la fonction somme est solution de (E). Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ à expliciter tel que $a_n = n^\alpha a_1$ pour tout $n \geq 1$ et préciser la valeur de a_0.
2. Déterminer l'ensemble des séries entières dont la fonction somme est solution de (E) et préciser leurs rayons de convergence.
3. Déterminer le domaine D de convergence (réel) de ces séries entières et expliciter leurs fonctions sommes sur D.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, par une intégration par parties généralisées (licite car les intégrales ci-dessous sont convergentes et car la fonction uv admet des limites finies en 0 et $+\infty$) avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $u : t \longmapsto t^{n+1}$ et $v : t \longmapsto -e^{-t}$, on obtient

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0 \text{ par croissances comparées}} + \int_0^{+\infty}(n+1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!I_0 = n!\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = n!$.

2. Soient $p, q \in \mathbb{N}$, alors $\langle X^p, X^q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p+q}e^{-t}\,\mathrm{d}t = I_{p+q} = (p+q)!$.

3. Puisque la famille $\{1, X, X^2\}$ est une base de F, on peut appliquer le procédé de Gram-Schmidt, mais pour obtenir $\mathrm{Vect}\{e_1\} = \mathrm{Vect}\{X\}$ et $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} = \mathrm{Vect}\{X, 1\}$, on le fait à partir de la famille $\{X, 1, X^2\}$. Posons $v_1 = X$ alors $\|V_1\|^2 = \langle X, X\rangle = 2!$ donc on pose $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X$. Puis, on pose

$$v_2 = 1 - \frac{\langle v_1, 1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 = 1 - \frac{\langle X, 1\rangle}{2}X = 1 - \frac{1}{2}X.$$

On a alors

$$\|v_2\|^2 = \left\langle 1 - \frac{1}{2}X, 1 - \frac{1}{2}X\right\rangle = \langle 1, 1\rangle - \langle X, 1\rangle + \frac{1}{4}\langle X, X\rangle = 1 - 1 + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

donc on pose $e_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}X\right)$. Enfin, on pose

$$v_3 = X^2 - \frac{\langle v_1, X^2\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{\langle v_2, X^2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2 = X^2 - \frac{3!}{2}X - 2\left(2! - \frac{3!}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}X\right) = X^2 - 4X + 2.$$

On obtient

$$\|v_3\|^3 = \langle X^2, X^2\rangle + 16\langle X, X\rangle + 4\langle 1, 1\rangle - 8\langle X^2, X\rangle + 4\langle X^2, 1\rangle - 16\langle X, 1\rangle = 4! + 32 + 4 - 8\times 3! + 8 - 16 = 4$$

donc on pose $e_3 = \dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \dfrac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est alors une base orthonormée de F vérifiant les conditions demandées.

4. Remarquons que la projection orthogonale sur F est bien définie puisque $\dim(F) = 3 < +\infty$ donc $E = F \oplus F^\perp$. Puisque la famille (v_1, v_2, v_3) est une base orthogonale de F, par la formule de cours, on obtient

$$\begin{aligned} p_F(X^3) &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\langle v_k, X^3\rangle}{\|v_k\|^2}v_k \\ &= \frac{4!}{2}X + 2\left(3! - \frac{4!}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}X\right) + \frac{1}{4}(5! - 4\times 4! + 2\times 3!)(X^2 - 4X + 2) \\ &= 9X^2 - 18X + 6 \end{aligned}$$

5. On remarque, puisqu'une norme est toujours positive, que

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(t^3 - (at^2 + bt + c))^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \inf\left\{\|X^3 - (aX^2 + bX + c)\|^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left(\inf\left\{\|X^3 - (aX^2 + bX + c)\| \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}\right)^2 \\ &= \left(\inf\left\{\|X^3 - P\| \mid P \in F\right\}\right)^2 \\ &= \left(d(X^3, F)\right)^2 \\ &= \|X^3 - p_F(X^3)\|^2. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2

1. Soient $x, y \in E$. En appliquant la relation $(*)$ au vecteur $x+y \in E$, on obtient par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$0 = \langle u(x+y), x+y \rangle = \underbrace{\langle u(x), x \rangle}_{=0} + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \underbrace{\langle u(y), y \rangle}_{=0}$$

ce qui entraîne par symétrie du produit scalaire :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle = \langle x, -u(y) \rangle$$

Par unicité de l'adjoint, l'identité précédente démontre que $u^* = -u$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique vérifiant la relation $(*)$, alors d'une part par la question précédente, $u^* = -u$ et d'autre part $u^* = u$ puisque u est autoadjoint. On en déduit que $2u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Réciproquement, l'endomorphisme nul vérifie la relation $(*)$ puisque pour tout $x \in E$, $\langle 0_{\mathcal{L}(E)}(x), x \rangle = \langle 0_E, x \rangle = 0$, et il est de plus autoadjoint car sa matrice dans toute base orthonormée de E est la matrice nulle qui est symétrique. Ainsi, il existe un unique endomorphisme symétrique vérifiant $(*)$, à savoir $0_{\mathcal{L}(E)}$.

Correction de l'exercice 3

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$, posons $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n-1}{n!}z^{3n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $|u_n| > 0$ pour tout $n \geq 2$, on peut écrire

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n\,|z|^{3n+3}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(n-1)\,|z|^{3n}} = \frac{n\,|z|^3}{(n-1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

La règle de D'Alembert pour les séries numériques entraîne la convergence de la série $\sum |u_n|$, ce qui démontre la convergence absolue de la série numérique $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{n-1}{n!}z^{3n}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. On en déduit que $R_1 \geq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, et ainsi $R_1 = +\infty$.

(b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq 1$, donc la suite $(a_n)_n = (a_n 1^n)_n$ est bornée. Comme $R_2 = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$, on en déduit que $R_2 \geq 1$. De plus, la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, car par exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{8n+1} = \sin\left(\frac{(8n+1)\pi}{4}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc la sous-suite $(a_{8n+1})_n$ ne tend pas vers 0. Par suite, la série $\sum a_n 1^n$ diverge grossièrement, donc $R_2 \leq |1|$, ce qui permet de conclure par double inégalités que $R_2 = 1$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, par convergence des séries apparaissant ci-dessous, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}z^{3n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n!}z^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}z^{3n} \\
&= -\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}(-z^3)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-z^3)^n \text{car le terme de la 1ère somme est nul pour } n=0 \\
&= -(-z^3)\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}(-z^3)^p + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-z^3)^n \text{ par le changement d'indice } p = n-1 \\
&= (z^3+1)e^{-z^3}
\end{aligned}$$

puisque pour tout $u \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n!} = e^u$.

Correction de l'exercice 4

1. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Notons S sa fonction somme sur $]-R;R[$. Par le cours, S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme :
$$\forall x\in]-R;R[,\quad S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\quad\text{et}\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$
Ainsi, pour tout $x\in]-R;R[$, on a
$$\begin{aligned}
x(x-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x) &= x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+3\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&\qquad\text{car les termes manquants sont nuls}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[n(n-1)a_n-(n+1)na_{n+1}+3na_n+a_n\right]x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+1)^2a_n-(n+1)na_{n+1}\right]x^n
\end{aligned}$$
On en déduit (en abrégeant développement en série entière par D.S.E)
$$\begin{aligned}
S\text{ est solution de }(E)\text{ sur }]-R;R[&\iff \forall x\in]-R;R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+1)^2a_n-(n+1)na_{n+1}\right]x^n=0=\sum_{n=0}^{+\infty}0x^n\\
&\iff \forall n\in\mathbb{N},\quad (n+1)^2a_n-(n+1)na_{n+1}=0\text{ par unicité du D.S.E}\\
&\iff \forall n\in\mathbb{N},\quad na_{n+1}=(n+1)a_n\quad\text{car } n+1\neq 0\\
&\iff a_0=0\text{ et }\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n\quad(**).
\end{aligned}$$
Une récurrence immédiate montre que si $a_1=0$, alors pour tout $n\geq 1$, $a_n=0$, et au contraire si $a_1\neq 0$, alors pour tout $n\geq 1$, $a_n\neq 0$. Dans ce cas, on obtient par produit télescopique :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{a_n}{a_1}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k}=\frac{n!}{(n-1)!}=n\text{ d'où }a_n=na_1$$
et on remarque que la formule est vraie aussi dans le cas où $a_1=0$.

2. On vient de faire la partie "analyse"du problème : si $\sum a_nx^n$ est une série entière de rayon de convergence strictement positif dont la fonction somme est solution de (E), alors $a_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=na_1$ (formule aussi vraie pour $n=0$). Synthèse : posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=na_1$ avec $a_1\in\mathbb{C}$. On voit que la suite $(a_n)_n$ vérifie $a_0=0$ et pour tout $n\geq 1$, $a_{n+1}=(n+1)a_1=\frac{n+1}{n}na_1=\frac{n+1}{n}a_n$, c'est à dire que la suite $(a_n)_n$ vérifie la relation $(**)$. Sous réserve que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_nx^n$ soit strictement positif, on pourra alors remonter les équivalences de la question précédente et en déduire que la fonction somme S de cette série entière est solution de (E) sur $]-R;R[$. Supposons dans un premier temps que $a_1=0$, alors $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $R=+\infty>0$. Supposons désormais $a_1\neq 0$, alors

$a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)\,|a_1|}{n\,|a_1|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

La règle de d'Alembert pour les séries entières entraîne alors que $R = \dfrac{1}{1} = 1 > 0$. Ainsi, l'ensemble des séries entières dont la fonction somme est solution de (E) est :

$$\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_1 x^n \mid a_1 \in \mathbb{C} \right\}.$$

3. Soit $a_1 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n a_1$. Si $a_1 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ donc le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 0x^n = 0$. Si $a_1 \neq 0$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut $R = 1$, donc le domaine D de convergence de cette série entière vérifie $]-1;1[\subset D \subset [-1;1]$. De plus, pour $x = \pm 1$, on a

$$|a_n x^n| = n\,|a_1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$$

donc la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement pour $x = \pm 1$. Ainsi, on obtient $D =]-1;1[$.

Pour tout $x \in]-1;1[$, on peut écrire $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_1 x^n = x a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$. Or on sait par sommation géométrique que pour tout $x \in]-1;1[$, $T(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Par dérivation d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on en déduit que

$$\forall x \in]-1;1[, \quad T'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

d'où

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x) = x a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x a_1}{(1-x)^2}.$$