Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2021-2022

Math IV - Cursus préparatoire 2A — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|} \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a < b$. Montrer que sur l'intervalle $[a, b]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas normalement.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\arctan(nx)}{n^2} \end{array}$$

1. Vérifier que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer f_n'. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la série de fonctions des dérivées $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. Déduire du point précédent que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Exprimer sa dérivée comme la fonction somme d'une série de fonctions sur $]0, +\infty[$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le reste d'ordre n de la série de fonctions des dérivées $\sum f_n'$.

   - a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|R_n(x)| \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(1+k^2x^2)}$.

   - b. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Partie ALGÈBRE

Exercice 3. On se place dans $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique : $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA \cdot B)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toutes matrices **symétriques** A et B, on a

$$(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\ \mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Décrire le cas d'égalité.

Exercice 4. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On veut déterminer l'ensemble A des vecteurs a tels que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\langle a, a + e_i\rangle = 0$.
Soit $a \in E$. On note $a_1, \ldots, a_n$ les coordonnées de a dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la famille $(a + e_1, \ldots, a + e_n)$ est libre si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \neq -1$. *Indication : on pourra considérer le déterminant de la matrice dont les colonnes sont formées des coordonnées des $a + e_i$ dans la base $\mathcal{B}$.*
2. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \neq -1$. Montrer que si $a \in A$ alors a est nul.
3. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i = -1$. Montrer que si $a \in A$ alors $a = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n e_i$.
4. Déterminer A.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ par $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.