Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit*

$$f_n \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|} \end{array}$$

1. *Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.*
2. *Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.*
3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a < b$. Montrer que sur l'intervalle $[a, b]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas normalement.*

Réponse

1. Cet question nous demande déterminer le domaine de S. Pour ce faire, il n'est pas suffisant de déterminer les domaines des f_n. Il faut déterminer l'ensemble des x appartenant aux domaines de toutes les fonctions f_n tels que la somme numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge. En d'autres termes nous cherchons le domaine de convergence simple.

Notons d'abord que chaque f_n est définie sur $\mathbb{R}$. Mais ceci n'est pas suffisant pour conclure que le domaine de S est $\mathbb{R}$. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on étudie la convergence de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|}$. C'est une série alternée puisque $(-1)^n f_n(x) = \frac{e^{-x}}{n+|x|} = \left|\frac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|}\right|$. Par ailleurs, quand n croît, $\frac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|}$ décroît, et $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|} = 0$. Cette conclusion ne dépend pas du signe de x puisque x ne varie pas. On se sert alors de la méthode de la convergence simple pour les séries alternées qui permet de conclure que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|}$ converge. Comme ce raisonnement ne dépend pas de la valeur de x, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes, le domaine de S est $\mathbb{R}$.

2. On se restreint à $\mathbb{R}_+$. La formule du reste d'ordre n pous les séries alternées montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \quad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|} \right| \leq \frac{e^{-x}}{n+1+|x|} \leq \frac{1}{n+1+|x|} \leq \frac{1}{n+1} \ .$$

On en conclut que sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $|R_n(x)|$ est bornée. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |R_n(x)| = 0$. Par conséquent, la convergence est uniforme.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, sur l'intervalle $[a,b]$, $\left| \dfrac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|} \right| = \dfrac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|}$ décroît quand x croît. Par conséquent, $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left| \dfrac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|} \right| = \dfrac{e^{-a}}{n+a}$. Or, la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-a}}{n+a}$ diverge par la méthode des séries de Riemann puisque $\dfrac{e^{-a}}{n+a} \sim \dfrac{e^{-a}}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. Nous avons donc montré que sur l'intervalle $[a,b]$, la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} \left| \dfrac{(-1)^n e^{-x}}{n+|x|} \right|$ diverge, en d'autres termes, que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas normalement.

Exercice 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit*

$$f_n \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\arctan(nx)}{n^2} \end{array}$$

1. *Vérifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que la fonction somme $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer f_n'. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la série de fonctions des dérivées $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.*
4. *Déduire du point précédent que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Exprimer sa dérivée comme la fonction somme d'une série de fonctions sur $]0,+\infty[$.*
5. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n le reste d'ordre n de la série de fonctions des dérivées $\sum f_n'$.*
   - **a.** *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|R_n(x)| \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k(1+k^2x^2)}$.*
   - **b.** *En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.*

Réponse

1. Il est bien connu que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x)| < \dfrac{\pi}{2}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \dfrac{\arctan(nx)}{n^2} \right| < \dfrac{\pi}{2n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{\arctan(nx)}{n^2} \right| \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\pi}{2n^2}$. Or cette dernière série numérique converge par la méthode des séries de Riemann. Par conséquent, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est la composition de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto nx$ divisée par la constante n^2. Comme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ par le premier point de l'exercice, cette série converge uniformément sur le même ensemble. Par le théorème sur les séries de fonctions continues, la fonction somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on détermine la dérivée de la fonction f_n.

$$f_n'(x) \;=\; \frac{n}{n^2(1+n^2x^2)} \;=\; \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \;.$$

Ensuite, on fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$. Sur l'intervalle $[a, +\infty[$, la fonction f_n' est décroissante. Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n'(x)| \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3a^2} \;.$$

Cette dernière série numérique converge par la méthode des séries de Riemann. Il s'en ensuit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

4. On vérifie les conditions du théorème pour les dérivées.

(i) Chaque f_n est dérivable avec une dérivée continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par le point 3 de l'exercice. En d'autres termes, chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc simplement $\mathbb{R}_+^*$ par le point 1 de l'exercice.

(iii) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Notons que ceci ne veut PAS dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge converge sur $\mathbb{R}_+^*$. D'ailleurs, c'est faux comme nous le montrera le point 5 de l'exercice.

Selon le théorème sur la dérivation des séries, ces trois conditions suffisent pour conclure que la fonction somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est $f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$. On obtient :

$$\forall x \in]0, +\infty[\;,\; f'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \;.$$

5. Le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ est définie par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(1+k^2x^2)}$.

a. Notons que comme chaque terme $\frac{1}{k(1+k^2x^2)}$ est positif, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(1+k^2x^2)}$.
Quand on coupe cette somme au rang $2n$, on lui enlève des termes positifs et par conséquent $|R_n(x)| \ge \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(1+k^2x^2)}$.

b. Il suffira de minorer $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |R_n(x)|$ par une constante strictement positive. On peut par exemple procéder comme suit :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |R_n(x)| \;\ge\; \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(1+k^2x^2)} \;\ge\; \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k(1+k^2\frac{1}{n^2})} \;\ge\; \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n(1+(2n)^2\frac{1}{n^2})} \;=\; \frac{n}{10n} \;=\; \frac{1}{10} \;.$$

Ici, la première inégalité est justifiée par notre travail du point a et on a remplacé x par $\frac{1}{n}$. Ceci montre que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui est plus fort que de dire qu'elle n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$ parce que la première conclusion entraîne la deuxième. On aurait pu faire les mêmes calculs avec en remplaçant x par 0, ce qui donnerait $\frac{1}{2}$ comme minorant et montrerait que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.