Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. Soit α un réel strictement positif. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^\alpha}{n^\alpha} e^{-nx}.$$

1. Montrer que le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ est $\mathbb{R}^+$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $g_n : x \longmapsto x^\alpha e^{-nx}$.

   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2. Pour $n \geq 2$ entier, on note $u_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n^2-1)(1+n^2x^2)}.$$

On note $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ la fonction somme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$

1. Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. On note $I = \int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\pi}{2n(n^2-1)}$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 3.

1. Rappeler l'expression du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^5$.
2. Montrer que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5$,

$$|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5| \leq \sqrt{55}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 4. Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire défini sur E et $\|\ \|$ sa norme associée. Soient x, y et z trois éléments de E.

1. Développer $\|x - y\|^2$.
2. On note $m = \dfrac{y+z}{2}$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\|x - y\| = \|x - z\| \Leftrightarrow x - m \text{ est orthogonal à } y - z.$$

Exercice 5. Soit a un nombre complexe. On note $E = \mathbb{C}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 2. On pose :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \varphi(P, Q) = \overline{P(-1)}Q(-1) + a\overline{P(0)}Q(0) + \overline{P(1)}Q(1).$$

1. Montrer que φ est linéaire en son second argument.
2. Montrer que φ est hermitienne (ou vérifie la symétrie hermitienne) si, et seulement si, a est réel. Dans la suite, on supposera que a est réel.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que φ définisse un produit scalaire hermitien sur E.
4. On suppose dans cette question que $a = 3$ (par la question précédente, φ est donc un produit scalaire sur E). On note $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$. Déterminer l'orthogonal de F, noté $F^\perp$, pour le produit scalaire φ.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x > 0$, alors $\dfrac{f_n(x)}{1/n^2} = n^{2-\alpha}x^\alpha e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparées, ce qui montre que $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. Si $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 0$ (car $\alpha > 0$), donc la série numérique $\sum f_n(0)$ converge (la suite de ses sommes partielle étant constante égale à 0). Si $x < 0$, alors $f_n(x)$ n'est pas bien défini à cause du x^α, donc la série numérique $\sum f_n(x)$ ne peut pas converger (elle n'a déjà pas de sens). Ainsi, le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ est $\mathbb{R}^+$.

2. (a) La fonction g_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ par opérations, et pour tout $x > 0$,

$$g_n'(x) = \alpha x^{\alpha-1}e^{-nx} - nx^\alpha e^{-nx} = x^{\alpha-1}e^{-nx}(\alpha - nx)$$

qui est du signe de $\alpha - nx$ puisque $x^{\alpha-1}e^{-nx} > 0$. Ainsi, g' est strictement positive sur $]0;\alpha/n[$, s'annule en α/n et est strictement négative sur $]\alpha/n;+\infty[$. La fonction g_n est donc croissante sur $[0;\alpha/n]$ puis décroissante sur $[\alpha/n;+\infty[$, avec $g_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ par croissances comparées puisque $n \neq 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n = \dfrac{1}{n^\alpha}g_n$, l'étude des variations faite à la question précédente montre que la fonction f_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et atteint son maximum en α/n. On en déduit que

$$\|f_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} f_n(x) = f_n\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{(\alpha/n)^\alpha}{n^\alpha}e^{-n\alpha/n} = \frac{\alpha^\alpha}{n^{2\alpha}}e^{-\alpha}.$$

En outre, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si, et seulement si $2\alpha > 1$, ce qui équivaut à $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Comme le terme $\alpha^\alpha e^{-\alpha}$ est constant non nul, la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+}$ converge si, et seulement si, $\alpha > \dfrac{1}{2}$. On en conclut que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

3. On peut déjà remarquer que puisque $|(-1)^n f_n| = |f_n|$ pour tout n, lorsque $\alpha > 1/2$, la série de fonctions $\sum(-1)^n f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais cela ne traite pas tous les cas possibles pour α. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, comme $f_n(x) \geq 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est alternée. De plus, $|f_n(x)| \leq \dfrac{x^\alpha}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (on aurait aussi pu se servir de la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$ pour justifier cette limite). Enfin, comme la suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (par positivité de α), les deux suites $\left(\dfrac{x^\alpha}{n^\alpha}\right)_n$ et $(e^{-nx})_n$ sont décroissantes et à valeurs positives, donc leur suite produit $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par le critère des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ est convergente (ce qui l'on savait déjà puisque la première question démontre même la convergence absolue de cette série). De plus, si on note $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k f_k(x)$, celui-ci vérifie :

$$|R_n(x)| \leq \left|(-1)^{n+1}f_{n+1}(x)\right| = f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \|f_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+} = \frac{\alpha^\alpha}{n^{2\alpha}}e^{-\alpha}.$$

La majoration (indépendante de x) étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on en déduit que la fonction R_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et, puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensemble,

$$\|R_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+} \leq \frac{\alpha^\alpha}{n^{2\alpha}}e^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $2\alpha > 0$. Ainsi, la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, ce qui achève de démontrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum(-1)^n f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Correction de l'exercice 2

1. Pour tout $n \geq 2$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 + n^2x^2 \geq 1$ d'où

$$|u_n(x)| = \frac{1}{(n^2-1)(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n^2-1}.$$

Par conséquent, la fonction u_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $\|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+} \leq \dfrac{1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Par comparaison de séries termes positifs, la série $\sum \|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+}$ converge, ce qui démontre la convergence normale, et en particulier uniforme, de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$. D'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions, la fonction somme $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2-1}\left[\frac{1}{n}\arctan(nx)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n(n^2-1)} < +\infty$$

   donc u_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   - On a vu ci-dessus que $\sum u_n$ converge normalement donc simplement sur $\mathbb{R}$, et que sa fonction somme est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - Enfin, par le calcul ci-dessus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^3}$ donc la série numérique $\sum\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x\right)$ converge.

   Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que la fonction S est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (ce qui justifie l'existence de I) et

$$I = \int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n^2-1)}.$$

3. La décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) de la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2-1)}$ est de la forme $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{X+1}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. En évaluant $XF(X)$ en 0, on obtient $a = -1$, puis $(X-1)F(X)$ en 1 donne $b = 1/2$ et $(X+1)F(X)$ en -1 donne $c = 1/2$ ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1/2}{n-1} + \frac{1/2}{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{N}(v_n - v_{n+1}) \quad \text{où } v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi}{2}(v_2 - v_{N+1}) \quad \text{par téléscopage} \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3

1. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^5$ est défini par :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_5), y = (y_1, \ldots, y_5) \in \mathbb{R}^5, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i.$$

2. Soit $x = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5$, avec la notation de la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5| &= |\langle x, y\rangle| \quad \text{où } y = (1,2,3,4,5) \\
&\leq \|x\|\|y\| \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2} \\
&\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2} \times \sqrt{55}
\end{aligned}$$

(les deux dernières lignes étant en réalité des égalités). De plus, toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs x et y sont liés, ce qui équivaut à l'existence d'un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda(1,2,3,4,5)$ (puisque $y \neq 0_{\mathbb{R}^5}$).

Correction de l'exercice 4

1. Par définition de la norme associée à un produit scalaire,

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

par bilinéarité puis symétrie du produit scalaire.

2. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\|x - y\| = \|x - z\| &\iff \|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 \text{ car la norme est positive} \\
&\iff \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, z\rangle + \|z\|^2 \\
&\iff \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle = \|z\|^2 - 2\langle x, z\rangle
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
x - m \text{ est orthogonal à } y - z &\iff \langle x - m, y - z\rangle = 0 \\
&\iff \left\langle x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}, y - z\right\rangle = 0 \\
&\iff \langle x, y\rangle - \langle x, z\rangle - \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\langle y, z\rangle - \frac{1}{2}\langle z, y\rangle + \frac{1}{2}\|z\|^2 = 0 \\
&\iff \langle x, y\rangle - \langle x, z\rangle - \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|z\|^2 = 0 \\
&\iff \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle = \|z\|^2 - 2\langle x, z\rangle
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\|x - y\| = \|x - z\| \iff x - m \text{ est orthogonal à } y - z.$$

Correction de l'exercice 5

1. Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Par linéarité de l'évaluation d'un polynôme en un point, on trouve

$$\begin{aligned}
\varphi(P, \lambda Q + R) &= \overline{P(-1)}\,(\lambda Q(-1) + R(-1)) + a\overline{P(0)}\,(\lambda Q(0) + R(0)) + \overline{P(1)}\,(\lambda Q(1) + R(1)) \\
&= \lambda\varphi(P, Q) + \varphi(P, R)
\end{aligned}$$

donc φ est linéaire en son second argument.

2. Supposons que $a \in \mathbb{R}$, alors pour tous $P, Q \in E$.

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi(P,Q)} &= \overline{\overline{P(-1)}Q(-1) + a\overline{P(0)}Q(0) + \overline{P(1)}Q(1)} \\
&= P(-1)\overline{Q(-1)} + aP(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} \quad \text{car } \overline{a} = a \\
&= \varphi(Q,P)
\end{aligned}$$

donc φ est hermitienne.

Réciproquement, supposons que φ est hermitienne. Alors, pour tous $P, Q \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(Q,P) = \overline{\varphi(P,Q)} &\iff \overline{Q(-1)}P(-1) + a\overline{Q(0)}P(0) + \overline{Q(1)}P(1) = P(-1)\overline{Q(-1)} + \overline{a}P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} \\
&\iff (a - \overline{a})\overline{Q(0)}P(0) = 0
\end{aligned}$$

En prenant par exemple $P = Q = 1$, il vient $a - \overline{a} = 0$ d'où $a \in \mathbb{R}$.

3. On a déjà vu que $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire en son second argument et hermitienne, donc φ est une forme sesquilinéaire sur E. Par conséquent, φ est un produit scalaire hermitien sur E si, et seulement si, φ est définie positive.

   - Analyse : supposons que φ est définie positive, alors pour tout $P \in E$, avec $P \neq 0_E$, $\varphi(P,P) > 0$ c'est-à-dire

   $$|P(-1)|^2 + a\,|P(0)|^2 + |P(1)|^2 > 0.$$

   Prenons par exemple $P = X^2 - 1$ qui s'annule en -1 et 1. Comme $P \neq 0_E$, $0 < \varphi(P,P) = 0^2 + a\,|-1|^2 + 0^2 = a$ donc a est strictement positif.

   - Synthèse : supposons $a > 0$, alors pour tout $P \in E$, on a :

   $$\varphi(P,P) = |P(-1)|^2 + a\,|P(0)|^2 + |P(1)|^2 \geq 0$$

   comme somme de termes positifs. De plus, l'égalité $\varphi(P,P) = 0$ entraîne $|P(-1)|^2 = 0$, $a\,|P(0)|^2 = 0$ et $|P(1)|^2 = 0$. On en déduit que $-1, 0$ et 1 sont tous trois racines de P, avec P de degré au plus 2 par hypothèse, ce qui implique que P est le polynôme nul. Ainsi, φ est définie positive.

   Finalement, on a montré que φ est un produit scalaire hermitien sur E si, et seulement si, $a > 0$.

4. Afin de déterminer l'orthogonal de F, on commence par déterminer une famille génératrice de F. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$, alors :

$$P \in F \iff P(1) = 0 \iff a_0 + a_1 + a_2 = 0 \iff a_0 = -a_1 - a_2$$

d'où $F = \left\{a_1(X-1) + a_2(X^2-1) \in E \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C}\right\} = \mathrm{Vect}\{X-1, X^2-1\}$. Par le cours, l'orthogonal de F correspond à l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux à la famille $\{X-1, X^2-1\}$. Ainsi, pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
P \in F^\perp &\iff \begin{cases} \varphi(X-1,P) = 0 \\ \varphi(X^2-1,P) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2(a_0 - a_1 + a_2) - 3a_0 = 0 \\ -3a_0 = 0 \end{cases} \\
&\iff a_0 = 0 \text{ et } a_1 = a_2
\end{aligned}$$

On trouve donc finalement $F^\perp = \{a_1(X + X^2) \mid a_1 \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}\{X(X+1)\}$.