Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 1 : Correction

Exercice 1. *Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux et surtout justifier avec précision votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.*

1. $\sqrt{x} + x^2 + \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x}$.
   FAUX : le terme de gauche tend vers 1 quand x tend vers 0, tandis que le terme de droite tend vers 0 ; ils ne sont donc pas équivalents.
2. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.
   FAUX : En $+\infty$, on a
   $$\ln(1+x^2) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim_{+\infty} 2\ln(x) \ .$$
   Par conséquent, $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} \sim_{+\infty} 2\dfrac{\ln(x)}{x^2}$, qui tend vers 0 (et ne tend donc pas vers 1) quand x tend vers $+\infty$.
3. *Le polynôme $P(X) = X^8 - X^7 + X^6 + X^4 - 3X^3 - 2X + 3$ admet 1 pour racine au moins double.*
   VRAI : On a $P(1) = 1 - 1 + 1 + 1 - 3 - 2 + 3 = 0$; et $P'(X) = 8X^7 - 7X^6 + 6X^5 + 4X^3 - 9X^2 - 2$, d'où $P'(1) = 8 - 7 + 6 + 4 - 9 - 2 = 0$. Puisque $P(1) = P'(1) = 0$, on peut conclure que 1 est racine au moins double. Même si l'énoncé ne le demande pas, vérifions que 1 est en fait racine exactement double : il suffit de vérifier que $P''(1) = 56 - 42 + 30 + 12 - 18 = 38 \neq 0$.

Exercice 2. *On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \cos(u_n) \quad et \quad u_0 = 0 \ .$$

1. *Démontrer que la fonction cosinus admet un unique point fixe l dans $[0,1]$, c'est-à-dire qu'il existe un unique réel $l \in [0,1]$ tel que $\cos(l) = l$.*
   Considérons la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x) - x$. Alors $f'(x) = -\sin(x) - 1$, qui est strictement négatif sur $[0,1]$. Par conséquent, f est strictement décroissante, et donc injective ; de plus, comme $f(0) = 1$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que f s'annule sur $[0,1]$. Puisqu'elle est injective, elle ne peut s'annuler qu'une fois (sans quoi 0 aurait deux antécédents), ce qui prouve qu'il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $\cos(x) = x$ (et en fait on sait même que $x \in]0,1[$).
2. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0,1]$.*
   Raisonnons par récurrence : soit $P(n)$ la propriété "$u_n \in [0,1]$". Par définition, on a $u_0 = 0 \in [0,1]$, donc $P(0)$ est vraie. Supposons maintenant que n est tel que $P(n)$ soit vérifiée. La fonction cos est de dérivée négative sur $[0,1]$, par conséquent elle y est décroissante, ce qui nous permet de

dire que $\cos([0,1]) = [\cos(1), \cos(0)] = [\cos(1), 1]$. Comme $0 \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos(1) \geq 0$ et on a donc $\cos([0,1]) \subseteq [0,1]$. En particulier, $u_{n+1} = \cos(u_n) \in [0,1]$ puisque $u_n \in [0,1]$ par hypothèse de récurrence. La propriété $P(n)$ est donc héréditaire ; puisque $P(0)$ est vraie, on conclut par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout n.

3. *Démontrer que :*

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2 \ |\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)|x-y| \ .$$

Soit $(x,y) \in [0,1]^2$. La fonction cos étant dérivable sur $]x,y[$ et continue sur $[x,y]$ (en fait, elle est bien sûr même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$...), on peut lui appliquer l'inégalité des accroissements finis, et obtenir

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq \sup\{|\cos'(c)| \colon c \in]x,y[\}|x-y| \ .$$

Puisque $|\cos'(c)| = \sin(c)$ pour tout $c \in [0,1]$, que la fonction sin est croissante sur $[0,1]$, et que $]x,y[\subset [0,1]$, on obtient bien comme attendu que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2 \ |\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)|x-y| \ .$$

4. *En déduire que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ |u_n - l| \leq (\sin(1))^n \ .$$

Raisonnons de nouveau par récurrence. Cette fois, la propriété $P(n)$ est "$|u_n - l| \leq (\sin(1))^n$". Pour $n = 0$, on a $|u_0 - l| = l \leq 1 = (\sin(1))^0$, ce qui établit la validité de $P(0)$. Supposons que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $P(n)$ soit vérifiée. Alors, on a

$$|u_{n+1} - l| = |\cos(u_n) - l| = |\cos(u_n) - \cos(l)| \ .$$

Puisque u_n et l appartiennent tous deux à $[0,1]$, on peut appliquer le résultat de la question précédente pour conclure que

$$|\cos(u_n) - l| \leq \sin(1)|u_n - l| \ .$$

Comme $|u_n - l| \leq (\sin(1))^n$ par hypothèse de récurrence, on obtient bien que

$$|u_{n+1} - l| \leq (\sin(1))^{n+1} \ .$$

Comme précédemment, on conclut par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $|u_n - l| \leq (\sin(1))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. *Conclure que la suite (u_n) est convergente.*
Comme $0 < \sin(1) < 1$, la suite $(\sin(1))^n$ converge vers 0 ; la majoration obtenue à la question précédente et le théorème des gendarmes nous permettent de conclure que $|u_n - l|$ tend vers 0, autrement dit, que (u_n) converge vers l.

Exercice 3. 1. *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2 \ .$$

Il suffit de développer :

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - X(z + \overline{z}) + z\overline{z} = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2 \ .$$

2. *Soit a un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1$.*

   Le résultat de la question précédente nous permet d'écrire que
$$X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1 = (X^n - e^{ia})(X^n - e^{-ia}) \ .$$
   Les racines de $X^n - e^{ia}$ sont les racines n-ièmes de e^{ia}, c'est-à-dire tous les complexes de la forme $e^{i(\frac{a+2k\pi}{n})}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$; ce sont n nombres complexes distincts (tout complexe différent de 0 a n racines distinctes, et ici e^{ia} est bien différent de 0 puisqu'il est de module 1) et le polynôme $X^n - e^{ia}$ est de degré n, ce dont on déduit l'égalité
$$X^n - e^{ia} = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i(\frac{a+2k\pi}{n})}) \ .$$
   Le même raisonnement amène à l'égalité
$$X^n - e^{-ia} = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i(\frac{-a+2k\pi}{n})}) \ .$$
   Finalement, on en déduit la factorisation
$$X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1 = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i(\frac{a+2k\pi}{n})})\right)\left(\prod_{l=0}^{n-1}(X - e^{i(\frac{-a+2l\pi}{n})})\right) \ .$$

Exercice 4. *Soit P le polynôme à coefficients réels défini par $P(X) = (X^2-1)^2 - 3X(X^2+1)$.*

1. *Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de P.*

   En développant, et en utilisant le fait que $j^3 = 1$ (donc $j^4 = j$), on obtient
$$P(j) = j^4 - 2j^2 + 1 - 3j^3 - 3j = -2j^2 - 2j - 2 = -2(j^2 + j + 1) = 0 \ .$$

2. *En déduire la factorisation de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.*

   Puisque j est racine de P, et que P est à coefficients réels, $\overline{j}$ est aussi racine de P ; ceci implique que $(X-j)(X-\overline{j}) = X^2 + X + 1$ divise P. Et en effet, on obtient (en utilisant le fait que $P(X) = X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 3X + 1$ pour mener à bien le calcul de la division euclidienne)
$$P(X) = (X^2 + X + 1)(X^2 - 4X + 1) \ .$$
   Ensuite, il ne reste plus qu'à factoriser un polynôme du second degré :
$$X^2 - 4X + 1 = (X-2)^2 - 3 = (X - 2 + \sqrt{3})(X - 2 - \sqrt{3}) \ .$$
   On obtient alors la factorisation suivante de P :
$$P(X) = (X^2 + X + 1)(X - 2 + \sqrt{3})(X - 2 - \sqrt{3}) \ .$$
   (Rappelons que $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ puisqu'il est de degré 2 et n'a pas de racines réelles).