Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2015-2016

Cursus préparatoire, 1ère année — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 1

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux et surtout justifier avec précision votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. $\sqrt{x} + x^2 + \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$.
2. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x\to +\infty}{\sim} x$.
3. Le polynôme $P(X) = X^8 - X^7 + X^6 + X^4 - 3X^3 - 2X + 3$ admet 1 pour racine au moins double.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \cos(u_n) \quad \text{et} \quad u_0 = 0\ .$$

1. Démontrer que la fonction cosinus admet un unique point fixe l dans $[0,1]$, c'est-à-dire qu'il existe un unique réel $l \in [0,1]$ tel que $\cos(l) = l$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0,1]$.
3. Démontrer que :
$$\forall (x,y) \in [0,1]^2\ |\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)|x-y|\ .$$
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n - l| \leq (\sin(1))^n\ .$$
5. Conclure que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2\ .$$
2. Soit a un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(a)X^n + 1$.

Exercice 4. Soit P le polynôme à coefficients réels défini par $P(X) = (X^2-1)^2 - 3X(X^2+1)$.

1. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de P.
2. En déduire la factorisation de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.