Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018

Math IV - Cursus préparatoire 2A

D.S. 1 commun - partie algèbre commentée

Dans ce texte, j'ai décidé de passer en revue un certain nombre d'erreurs souvent trouvées dans les copies que j'ai corrigées.

Je vais donc citer textuellement certains passages tirés des copies et les commenter.

Quand on y pense, on vous apprend les maths mais on ne vous apprend pas à chercher à résoudre des exercices. En effet, les corrections que les chargés de TD vous présentent sont le produit final d'une réflexion et d'une recherche plus ou moins importantes et on ne vous dit pas forcément comment les choses ont été mises en places.

Dans une telle recherche, il y a des passages obligés, des objets à poser, des buts à fixer, ce que de nombreux étudiants n'ont pas encore acquis.

Pour mémoire, je remets l'énoncé de la partie algèbre du D.S. en question.

Exercice 3. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel (de dimension quelconque). Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires telle que pour tout $x \in E$ on ait

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale.
2. Soit $x \in E$ un vecteur quelconque et soit
$$y = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$
Montrer que $y \in F^{\perp}$.
3. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
4. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles sur $[0,1]$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $\varphi : F \times F \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(f, g) = -\int_0^1 (f(x)g''(x) + f''(x)g(x))dx.$$
Montrer que φ est un produit scalaire sur F.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, soient $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$.
Soit $u = (-1, 2, 3)$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de u sur F.

Le message principal que je veux faire passer ici est le suivant.

Dans une question du type

On suppose que $\underbrace{\boxed{\cdots\cdots}}_{A}$. Montrer que $\underbrace{\boxed{\cdots\cdots}}_{B}$.

Comment doit-on procéder ?

Au lycée, une telle question se traiterait souvent en partant de A qu'on manipulerait et au bout de deux ou trois lignes, on obtiendrait B. En L1 ou L2, ça peut éventuellement fonctionner pour des questions très simples, dans lesquelles A et B n'ont aucune complexité, mais dans une grande majorité des cas, il ne faut pas faire comme ça.

La bonne méthode est de commencer par s'intéresser au but B.

Qu'est-ce qu'on entend par "s'intéresser au but" ?

On doit traduire B en termes mathématiques, on doit savoir ce que B signifie (ceci se fait au brouillon ou mentalement souvent).

Ensuite on commence la démonstration de B. Pour le moment je n'ai pas évoquer l'hypothèse A. Ici A doit être vu comme un outil ou une boite à outils qui vont nous servir à ouvrir certaines portes pour avancer dans la progression de la démonstration de B.

Une erreur commise par beaucoup (trop) d'étudiants est celle d'avoir conservé les habitudes du lycée, à savoir : on manipule A, on le triture comme on peut sans trop savoir où on va.

Je donne un exemple concret. Regardons la question 2 de l'exercice 3 du DS :

> 2 Soit $x \in E$ un vecteur quelconque et soit
> $$y = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$
> Montrer que $y \in F^{\perp}$.

Dans cet exemple, l'hypothèse A est donnée par les deux premières lignes (i.e. $x \in E$ et la définition de y en fonction de x) ; et le but B est "$y \in F^{\perp}$".

Voici textuellement ce que j'ai trouvé dans une copie

> $x \in E \qquad y = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
> Comme $x \in E$, $\langle x, e_i \rangle = 0$ sauf pour $x = e_i$
> Donc $y = x - \langle e_i, e_i \rangle e_i$
> $y = e_i - \|e_i\| e_i$

Bien entendu, dès la 2ème ligne, c'est faux et le reste suit. Mais ce nous intéresse ici, c'est de voir que c'est un exemple typique de ce que je disais plus haut. En effet, l'étudiant manipule l'hypothèse A et c'est tout. A quel moment il dit que le but est de montrer que $y \in F^{\perp}$? Aucun.

Il est probable que le but B soit quand même dans son esprit et qu'en démarrant de cette façon, il espérait arriver à démontrer B mais c'était perdu d'avance.

Sur cet exemple, le bon démarrage aurait été de se dire mentalement :

Je dois montrer que $y \in F^{\perp}$.
Comment traduire ce but ?
Je me souviens que la définition de "$y \in F^{\perp}$" est y est orthogonal à tout élément de F ; i.e. "pour tout $x \in F$, $\langle y, x\rangle = 0$.
Ainsi une façon "normale" de commencer serait d'écrire : Soit $x \in F$. Puis d'essayer de montrer que $\langle y, x\rangle = 0$.
Le problème ici, c'est que la lettre x est déjà prise (dans l'énoncé de l'hypothèse) donc je ne dois pas l'utiliser (ça a pourtant été une erreur très fréquente dans les copies). Par conséquent je dois par exemple commencer par :
Soit $z \in F$. Puis on essaie de montrer que $\langle y, z\rangle = 0$.

Maintenant, dire que z est dans F signifie que z est une combinaison linéaire des e_i (par définition même de F qui le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}$). Donc la suite logique serait : Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $z = \lambda_1 e_i + \cdots + \lambda_n e_n$.
Ensuite le calcul final serait :

$$\begin{aligned}
\langle y, z\rangle &= \langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\rangle \\
&= \langle x \ , \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \ , \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\rangle \\
&\quad \text{(on change un des indices avant de développer)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle - \sum_{i,j} \lambda_j \langle x, e_i\rangle \langle e_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle \langle e_i, e_i\rangle \\
&\quad \text{(les termes ayant } i \neq j \text{ disparaissent car } \langle e_i, e_j\rangle = 0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle \text{(les } e_i \text{ sont supposés unitaires)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On aurait pu se contenter de montrer que z est orthogonal à chacun des e_i ce qui aurait montré qu'il est dans $F^{\perp}$ (c'est ce que j'ai fait dans la correction distribuée). Le calcul aurait été plus rapide.

Dans l'exemple précédent, j'ai illustré le cas typique où les habitudes du lycée sont toujours présentes (à savoir ne pas s'intéresser au but B et seulement manipuler l'hypothèse A).

L'exemple suivant est révélateur d'autre chose. Cela concerne la question 1 de l'exercice 3, voici le texte d'un(e) étudiant(e).

Montrons que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale.
$\mathcal{B}$ est orthogonale ssi $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$
Soit donc $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad i \neq j$
$\langle e_i, e_j\rangle = 0$ (produit scalaire usuel)
Donc la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Dans cet exemple, on voit que l'étudiant(e) ne fait référence à l'hypothèse à aucun moment (ici l'hypothèse est "Les e_i sont unitaires et pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$").

D'après son raisonnement, n'importe quelle famille serait orthogonale. La seule raison qu'il donne c'est qu'on travaille avec "le produit scalaire usuel". Or ce qu'on appelle produit scalaire usuel ou produit scalaire canonique, c'est le produit scalaire définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\langle (x_1, \ldots, x_), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Il y a aussi un produit scalaire canonique dans $M_n(\mathbb{R})$ et un autre à la rigueur dans $\mathbb{R}_n[X]$. Si on n'est pas dans un des trois espaces évoqués, la notion de produit scalaire usuel n'a strictement aucun sens.
Ici on est dans un espace pré-hilbertien quelconque avec un produit scalaire dont on ne sait rien, donc si on veut arriver à nos fins, on doit utiliser l'hypothèse...

Dans l'exemple qui suit, on illustre une chose fréquente. Les étudiants ont souvent tendance à se lancer dans les calculs tête baissée sans voir qu'ils font fausse route. Cela concerne la question 1 de l'exercice 5. Encore une fois, je recopie textuellement une réponse trouvée dans une copie.

> $F = \text{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
> On sait que $F \oplus F^{\perp} = E$ donc $\dim F^{\perp} = 1$.
> On cherche une base quelconque de $F^{\perp}$ tel que $\forall (x,y,z) \in F^{\perp}$
>
> $$\begin{cases} \langle (x,y,z), v_1 \rangle = 0 \\ \langle (x,y,z), v_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0+y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff y=z$$
>
> Donc $F^{\perp} = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$

Les deux premières lignes sont correctes. La 3ème ligne n'est pas fausse mais un peu mal écrite (ce n'est pas le plus grave). Là où les choses se gâtent, c'est à la fin du système où un système à 2 équations est censé être équivalent à une seule équation (ce qui en théorie est possible si les deux équations du systèmes sont colinéaires ce qui n'est pas le cas ici). Première erreur grossière ; d'autant plus qu'on sait que $F^{\perp}$ est de dimension 1 donc $F^{\perp}$ ne peut pas être défini par une seule équation dans un espace de dimension 3 (sinon il serait de dimension 2).
Cette erreur amène à la ligne suivante : "Donc $F^{\perp} = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$".
Cette ligne est donc basée sur l'équation trouvée au dessus. Mais là, iune deuxième erreur d'appréciation est commise. Le vecteur obtenu $(0,1,1)$ n'est clairement pas orthogonal à $(1,1,0)$, ni à $(1,0,1)$.
Une simple vérification mentale aurait permis de voir que ce vecteur n'est pas dans $F^{\perp}$.
Donc un conseil : Quand c'est possible et rapide, vérifiez vos calculs.

L'exemple suivant concerne la question 1 de l'exercice 4. Cette question, dans mon esprit, était une question "cadeau" que tout le monde aurait du réussir ; mais, à ma grande surprise, dans un bon tiers des copies, elle a été mal (voire très mal traitée) ou même sautée.
Je reproduis une réponse trouvée dans une copie.

> F sous espace vectoriel si
> $\star$ $f(0) = 0$ ssi $x = 0$ c'est le cas d'après la définition de F
> $\star$ Soit $(x,y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$
> $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$
> C'est vrai car les fonctions sont continues car de classe C^2 et par linéarité c'est vrai quelque soit la fonction f.
>
> Donc F est un sous espace vectoriel de E.

Ici, il y a beaucoup de choses à dire...
Déjà, il y a une confusion entre sous-espace vectoriel et application linéaire.
De plus, la ligne qui commence par $f(0) = 0$ montre une confusion entre application linéaire et la définition de F.
Enfin, l'explication donnée à ligne qui commence par $f(\lambda x + y)$, n'a pas vraiment de sens.
Le bilan de cet exemple est le suivant : les bases de l'algèbre linéaire (notion de sev, d'application linéaire, famille libre, génératrice, base, dimension, matrice dans des bases, etc) DOIVENT ÊTRE SUES !
L'algèbre III et IV nécessitent absolument la maitrise de l'algèbre linéaire du L1.