Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Math IV - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Les quatre exercices sont indépendants.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'un groupe (on explicitera les différentes notions intervenant).
2. Citer avec précision le théorème de Lagrange.

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniforme sur $[0;1]$.
3. Soit $a \in]0;1[$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [a;1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{2}{na}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[a;1]$.
   (c) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $]0;1]$?
4. Démontrer l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux réels. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} q : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & a\,\mathrm{Tr}({}^tAA) + b(\mathrm{Tr}(A))^2 \end{array}$$

où Tr désigne la trace.

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. On suppose pour la suite de l'exercice que $n = 2$.
   Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, expliciter $q(A)$ en fonction de x, y, z et t.
3. Rappeler la définition de la matrice d'une forme quadratique $q' : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dans une base de E (où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie) et déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. À l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gauss :
   (a) Déterminer la signature de q dans le cas où $a = 1$ et $b = 2$.

(b) Trouver une base orthogonale pour q dans le cas où $a = 1$ et $b = -1$ (on pourra se contenter de donner les coordonnées dans la base canonique des vecteurs de cette base). Donner aussi la matrice de q dans la base orthogonale trouvée.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Quelle hypothèse du théorème de dérivation pour les suites de fonctions est mise en défaut dans cet exemple ?

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. On note φ la forme polaire de q et $C(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$ le cône isotrope de q.

1. On suppose dans cette question seulement qu'il existe $u, v \in E$ tels que $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$.
   (a) En considérant la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto q(u + tv)$, démontrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u + t_0 v \in C(q)$.
   (b) On note $w = u + t_0 v$. Montrer que l'un des deux termes parmi $\varphi(u, w)$ et $\varphi(v, w)$ est non nul.
2. Montrer que si $\mathrm{Ker}(q) = C(q)$ alors q est positive ou q est négative.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Soit $x_0 \in [0;1]$ fixé.

   Si $x_0 = 0$, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x_0) = f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Si $x_0 \neq 0$, on a $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n(x_0^3+x_0)e^{-x_0}}{nx_0} = (x_0^2+1)e^{-x_0}$.

   Par suite, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ (x^2+1)e^{-x} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

2. Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $[0;1]$. Si $(f_n)_n$ convergeait uniformément sur $[0;1]$, sa limite f devrait être continue sur $[0;1]$, or f est discontinue en 0. Ainsi, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.

3. Soit $a \in]0;1[$.

   (a) Soient $n \geq 1$, $x \in [a;1]$. On a

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} - (x^1+1)e^{-x} \right| = \left| \frac{(x^2+1)e^{-x}(nx - nx - 1)}{nx+1} \right| = \frac{(x^2+1)e^{-x}}{nx+1} \leq \frac{2}{na}$$

   puisque pour tout $x \in [a;1]$, $e^{-x} \leq 1$, $x^2+1 \leq 2$ et $nx+1 \geq na$.

   (b) Comme pour tout $x \in [a;1]$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{2}{na}$ et que la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensemble, on en déduit que

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty,[a;1]} = \sup_{x\in[a;1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   donc par théorème des gendarmes, $\|f_n - f\|_{\infty,[a;1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a;1]$.

   (c) On a vu que pour tout $x \neq 0$, $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{(x^2+1)e^{-x}}{nx+1}$. On remarque que pour tout $n \geq 1$,

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)e^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0.$$

   Comme $\dfrac{1}{n} \in]0;1]$ pour tout $n \geq 1$, on en conclut que $\|f_n - f\|_{\infty,]0;1]} \geq \left| f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{1}{n}\right) \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \neq 0$ ne peut pas tendre vers 0. Par conséquent, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]0;1]$.

4. Attention, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$ donc on ne peut pas appliquer directement le théorème d'échange limite/intégrale sur un segment. On va utiliser le théorème de convergence dominée. Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue par morceaux sur $[0;1]$ (car continue). De plus, $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction f continue par morceaux. Enfin, on a pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in]0;1]$,

$$|f_n(x)| = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} \leq \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx} = (x^2+1)e^{-x}$$

   et cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$ car $f_n(0) = 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [0;1]$, $|f_n(x)| \leq (x^2+1)e^{-x}$. Or la fonction $x \longmapsto (x^2+1)e^{-x}$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc absolument intégrable sur $[0;1]$. D'après le théorème de convergence dominée, on obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Correction de l'exercice 2

1. On pose $\varphi : (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \dfrac{1}{2}(q(A+B)-q(A)-q(B))$. On a alors, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\varphi(A,B) &= \frac{1}{2}(a\operatorname{Tr}({}^t(A+B)(A+B)) + b\operatorname{Tr}(A+B)^2 - a\operatorname{Tr}({}^tAA) - b\operatorname{Tr}(A)^2 - a\operatorname{Tr}({}^tBB) - b\operatorname{Tr}(B)^2)\\ &= \frac{1}{2}(a\operatorname{Tr}({}^tAB) + a\operatorname{Tr}({}^tBA) + 2b\operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)) \quad \text{par linéarité de la transposée et de la trace}\\ &= a\operatorname{Tr}({}^tAB) + b\operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B) \quad \text{car } \operatorname{Tr}({}^tBA) = \operatorname{Tr}({}^t({}^tBA)) = \operatorname{Tr}({}^tAB).\end{aligned}$$

Soient $A, A', B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi(\lambda A + A', B) = a\operatorname{Tr}({}^t(\lambda A' + A)B) + b\operatorname{Tr}(\lambda A + A')\operatorname{Tr}(B) = \lambda\varphi(A,B) + \varphi(A',B)$$

donc φ est linéaire par rapport à la première variable. De plus, φ est symétrique puisque pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(B,A) = \varphi(A,B)$. Ainsi, φ est une forme bilinéaire symétrique, vérifiant pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,A) = q(A)$, donc q est une forme quadratique.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Après calcul matriciel de ${}^tAA$, on trouve

$$q(A) = a(x^2+y^2+z^2+t^2) + b(x+t)^2 = (a+b)x^2 + ay^2 + az^2 + (a+b)t^2 + 2bxt.$$

3. Soit $q' : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Notons φ' la forme polaire de q'. Alors la matrice de q' dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient (i,j) est donné par $\varphi'(e_i, e_j)$.
Si l'on note $\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on obtient

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(q) = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

4. (a) Dans le cas où $a = 1$ et $b = 2$, on obtient pour tout $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$q(A) = 3x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2 + 4xt = 3\left(x + \frac{2}{3}t\right)^2 + y^2 + z^2 + 3t^2 - \frac{4}{3}t^2 = 3\left(x + \frac{2}{3}t\right)^2 + y^2 + z^2 + \frac{5}{3}t^2.$$

Les coefficients devant les formes linéaires au carré étant tous strictement positifs, la signature de q est $(4, 0)$.

(b) Dans le cas où $a = 1$ et $b = -1$, on obtient pour tout $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$q(A) = y^2 + z^2 - 2xt = y^2 + z^2 - \frac{2}{4}((x+t)^4 - (x-t)^4) = -\frac{1}{2}(x+t)^4 + y^2 + z^2 + \frac{1}{2}(x-t)^4.$$

Posons $X = (x+t)$, $Y = y$, $Z = z$ et $T = x - t$ de sorte que $q(A) = -\frac{1}{2}X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{1}{2}T^2$. Alors on a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ avec } Q \text{ inversible d'où } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}.$$

La matrice Q^{-1} représente la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à une nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans laquelle les coordonnées de $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sont ${}^t(X\ Y\ Z\ T)$. De plus, $\mathcal{B}'$ est une base

q-orthogonale. Pour obtenir les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$, il suffit donc d'inverser Q (par la méthode du miroir par exemple). Avec les opérations successives $L_4 \leftarrow \dfrac{1}{2}(L_1 - L_4)$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, on trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donc les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}_c$ sont

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3

1. Soit $n \geq 1$, alors f_n est la composée de la fonction racine avec la fonction $g_n : x \longmapsto x^2 + \dfrac{1}{n}$, *i.e.* $f_n = \sqrt{} \circ g_n$. Puisque g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $\sqrt{}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On commence par étudier la convergence simple. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, alors $f_n(x_0) = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{x_0^2} = |x_0|$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

   Montrons que la convergence est uniforme. Soient $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, alors on a en utilisant la quantité conjuguée

$$|f_n(x) - |x|| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \left| \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \right| = \frac{1}{n\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

   donc $0 \leq \|f_n - f\|\infty \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0, donc non $\mathcal{C}^1$.

3. On a vérifié que pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc l'hypothèse du théorème de dérivation qui n'est pas vérifié est : la suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. (On peut donc en déduire que $(f_n')_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, sinon la fonction valeur absolue serait $\mathcal{C}^1$.)

Correction de l'exercice 4

1. On suppose qu'il existe $u, v \in E$ tels que $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$.

   (a) On considère la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto q(u+tv)$. Puisque la forme polaire de q, φ, est bilinéaire symétrique, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$q(u + tv) = \varphi(u + tv, u + tv) = \varphi(u, u) + 2t\varphi(u, v) + t^2\varphi(v, v) = q(u) + 2t\varphi(u, v) + t^2 q(v).$$

   Ainsi, $t \longmapsto q(u+tv)$ est une fonction polynômiale de degré exactement 2 (car $q(v) > 0$), de discriminant

$$\Delta = 4\varphi(u, v)^2 - 4\underbrace{q(u)q(v)}_{<0} > 0.$$

   Elle admet donc deux racines réelles distinctes t_0 et t_1. Ainsi, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $q(u + t_0 v) = 0$, c'est-à-dire $u + t_0 v \in C(q)$.

(b) On pose $w = u + t_0 v$. Supposons par l'absurde que $\varphi(u, w) = 0$ et $\varphi(v, w) = 0$. Puisque l'on peut écrire

$$0 = \varphi(u, w) = \varphi(u, u + t_0 v) = q(u) + t_0 \varphi(u, v) \quad \text{et} \quad 0 = \varphi(v, w) = \varphi(v, u + t_0 v) = \varphi(u, v) + t_0 q(v),$$

on en déduit que $q(u) = -t_0 \varphi(u, v) = -t_0(-t_0) q(v) = t_0^2 q(v) \geq 0$ ce qui est absurde. Ainsi, l'un des termes au moins est nul.

2. On raisonne par l'absurde (ou par contraposée si l'on veut). Supposons que $\mathrm{Ker}(q) = C(q)$ et que q n'est ni positive, ni négative, alors il existe $u, v \in E$ tels que $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$. D'après la question précédente, on en déduit qu'il existe $w \in C(q)$ tel que $\varphi(u, w) \neq 0$ ou $\varphi(v, w) \neq 0$. Par suite, w n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(q) = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$ ce qui est contradictoire puisque $\mathrm{Ker}(q) = C(q)$. Ainsi, si $\mathrm{Ker}(q) = \mathbb{C}(q)$, q est de signe constant.