Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Endomorphismes f vérifiant $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

1. Propriétés :
   (a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E vérifiant $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
      i. Montrer que n est un nombre pair et déterminer le rang de f en fonction de n.
      ii. Montrer que, pour tout vecteur x de E, $(f \circ f)(x) = 0$.
   (b) Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\dim E = 2 \operatorname{rang} f$.
      i. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
      ii. En déduire que l'on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
2. Cas général :
   Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E de rang p vérifiant $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$.
   (a) Que peut-on dire de la famille $(e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_p)$?
   (b) Montrer que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
   (c) Posons, pour tout entier i compris entre 1 et p, $e_{p+i} = f(e_i)$; calculer $f(e_{p+i})$.
   (d) Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{2p})$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
3. Application :
   Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$, et, **sans aucun calcul**, déterminer A^2.
   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
   (c) Déterminer les vecteurs d'une telle base $\mathcal{B}'$ en fonctions des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2. Étude d'un endomorphisme sur l'espace des polynômes.

Soit n un entier naturel, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P(X)) = X(P(X) - P(X-1))$.

1. Questions préliminaires :
   (a) Calculer $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$.
   (b) Si $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$, quel est le terme de plus haut degré du polynôme $P(X-1)$?
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X) = P(X-1)$. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que Q est un polynôme constant que l'on précisera.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau de f, en déduire la dimension de l'image de f.
4. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 2$.
   (a) Quelle est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Écrire la matrice de l'endomorphisme f dans cette base.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Étude de la diagonalisation dans le cas général :
   Pour tout entier naturel k, on définit les polynômes P_k par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, et pour tout entier $k \geq 2$, $P_k(X) = X(1-X)(2-X)\cdots(k-1-X)$.
   (a) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Soit k dans $\{0, \ldots, n\}$, déterminer un réel c_k vérifiant $f(P_k) = c_k P_k$.
   (c) Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3. Un vrai-faux.

Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, alors l'intégrale $\int_I f$ est convergente.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, et vérifiant pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$, alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+} f$ converge.
3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. Le sous-espace propre associé à λ, E_λ, est stable par f.
4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et f un endomorphisme de E. Si $f^2 (= f \circ f)$ est diagonalisable, alors f est diagonalisable.