Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans cette base est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $E_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et de $E_2 = \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.
2. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la matrice inversible P telle que $M = PM'P^{-1}$ et calculer P^{-1}. Que représente la matrice P^{-1} ?

Exercice 2. Soit $D = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont distincts. On considère l'application $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto DM - MD \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que le noyau de u est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. L'endomorphisme u est-il surjectif ? Donner le rang de u.
4. On note F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux sont tous nuls.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et calculer sa dimension.
   (b) Montrer que $u(M) \in F$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (c) En déduire que l'image de u est F.

Exercice 3. Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les deux cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{|\sin n|}{n^2}$, 2. $u_n = \dfrac{(n!)^a}{2^n}$ où $a \in \mathbb{R}$ (on discutera selon les valeurs de a).

Exercice 4. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) \mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \sin(2x)}{\sqrt{x^3 + x^4}} \mathrm{d}x$,
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

Exercice 5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{e^n}{n}$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} - u_n \sim \alpha u_n$ quand n tend vers $+\infty$.
3. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k)$ quand n tend vers $+\infty$.
4. En déduire un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^k}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y + z = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Les deux vecteurs étant libres, on en déduit qu'une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

   De même, on montre qu'une base de $\mathrm{Ker}(u - 2id)$ est donnée par $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2. Pour montrer la somme directe, on montre facilement que l'intersection des deux noyaux est réduite au vecteur nul, puis on utilise la dimension pour conclure. Sans utiliser la dimension, on écrit un élément $x \in \mathbb{R}_3$ quelconque sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(u - id)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2id)$, on applique u à cette égalité et cela permet d'exprimer x_1 et x_2 en fonction de x et $u(x)$; on vérifie réciproquement que x_1 et x_2 appartiennent aux bons espaces.

3. On écrit la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les bases de $\mathrm{Ker}(u - id)$ et $\mathrm{Ker}(u - 2id)$ pour obtenir M' qui est bien semblable à M puisque il s'agit de la matrice de u dans une base de $\mathbb{R}^3$.

4. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $((1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 0, 1))$. Cela revient simplement à dire que l'on met les vecteurs de la nouvelle base exprimés dans l'ancienne base (la base canonique) en colonne dans une matrice. On trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour trouver P^{-1}, on utilise la méthode du miroir (avec les opérations $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$) pour trouver $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   La matrice P^{-1} obtenue est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base (e_1, e_2, e_3).

Correction de l'exercice 2

1. On a déjà clairement que $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il reste donc à montrer que u est linéaire. Pour cela, on prend M, N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et on montre que $u(\lambda M + N) = \lambda u(M) + u(N)$ ce qui est immédiat.

2. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $MD = DM$. Passant aux éléments, cela donne $\sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Utilisant le fait que la matrice D est diagonale, on obtient $a_i m_{ij} = m_{ij} a_j$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$ puisque les a_k sont tous distincts. Ainsi le noyau de u est inclus dans l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Réciproquement, il est clair qu'une matrice diagonale est dans le noyau de u (puisqu'elle commute avec n'importe quelle autre matrice diagonale).

3. (a) La dimension du sous-espace vectoriel F des matrices à coeffients diagonaux nuls est $n^2 - n$. Pour le démontrer proprement, on décompose toute matrice $M = (m_{i,j})$ de F dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} m_{i,j} E_{i,j}$ puisque les termes diagonaux sont nuls. La famille

$\{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ est génératrice de F et clairement libre comme famille extraite d'une famille libre, donc c'est une base de F.

(b) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le terme d'indice (i, i) de $u(M)$ est donné par :

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{ki} - \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{ki} = a_i m_{ii} - m_{ii} a_i = 0$$

Cela montre que $u(M) \in F$.

(c) On a montré que $\mathrm{Im}(u) \subset F$ en 3b). Puis on écrit $\dim(F) = n^2 - n = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u))$ par le théorème du rang puis par $3a$), d'où l'égalité voulue.

Correction de l'exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n = \dfrac{|\sin n|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$ donc elle converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(n!)^a}{2^n} > 0$, on peut utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^a}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(n!)^a} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^a \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(n+1)^a.$$

Si $a > 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc $\sum u_n$ diverge.
Si $a < 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $0 < 1$ quand n tend vers $+\infty$ donc $\sum u_n$ converge.
Si $a = 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}$ tend vers $\dfrac{1}{2} < 1$ quand n tend vers $+\infty$ donc $\sum u_n$ converge.

Correction de l'exercice 4

1. Notons $f : \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right) \end{array}$.

• f est continue sur $[1;+\infty[$ donc intégrable sur tout segment de $[1;+\infty[$ (en particulier sur $[1; M]$ pour tout $M > 1$).

• Pour étudier l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, on utilise la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1-(x^2-x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1})} = \frac{2}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} \sim_{+\infty} \frac{1}{x} \geq 0$$

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, *i.e.* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, donc f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.
Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

2. Posons $g : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)+\sin(2x)}{\sqrt{x^3+x^4}} \end{array}$.

• La fonction g est continue sur $]0;+\infty[$ donc g est absolument intégrable sur tout segment de $]0;+\infty[$.

• Au voisinage de 0 : on a $\sin x = x + o_0(x)$ et $\sin(2x) = 2x + o_0(x)$. Ainsi, $\sin(x)+\sin(2x) = 3x + o_0(x) \sim_0 3x$. Donc on obtient

$$g(x) \sim_0 \frac{3x}{\sqrt{x^3}} = \frac{3x}{x\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 0$$

Puisque la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0, on en déduit donc que g est intégrable au voisinage de 0, donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ converge.

• Au voisinage de $+\infty$, on a

$$0 \leq |g(x)| = \frac{|\sin x + \sin(2x)|}{\sqrt{x^3+x^4}} \leq \frac{2}{\sqrt{x^3+x^4}} \leq \frac{2}{\sqrt{x^4}} = \frac{2}{x^2}$$

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc g est (absolument) intégrable au voisinage de $+\infty$. Par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge.

3. Notons $h : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \end{array}$.

• La fonction h est continue sur $]0;+\infty[$ donc intégrable sur tout segment de $]0;+\infty[$.

• Au voisinage de 0, on a $h(x) \sim_0 \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$, et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable, donc h est intégrable au voisinage de 0 (en particulier $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ converge).

• Pour étudier le comportement de l'intégrale au voisinage de $+\infty$: soit $X > 1$. On calcule $\displaystyle\int_0^X h(x)dx$ par une intégration par parties, puis on fera tendre X vers $+\infty$:

$$\int_1^X \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin x}{2x^{\frac{3}{2}}}dx$$

Puisque $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\sin X}{\sqrt{X}} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin x}{2x^{3/2}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2x^{3/2}}dx$ car la fonction $0 \leq \dfrac{|\sin x|}{2x^{3/2}} \leq \dfrac{1}{x^{3/2}}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\int_1^X h(x)dx$ admet une limite finie quand $X \to +\infty$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge.

Correction de l'exercice 5

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{e^n}{n}$. Par croissance comparée, on remarque que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc u_n ne tend pas vers 0, par suite la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{e^{n+1}}{n+1} - \dfrac{e^n}{n} = \dfrac{e^n}{n(n+1)}(ne-(n+1)) = \dfrac{e^n}{n(n+1)}((e-1)n-1)$ d'où $u_{n+1} - u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{(e-1)e^n}{n} = (e-1)u_n$. Ainsi $\alpha = e-1$.

3. Notons $a_n = (e-1)u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $a_n \geq 0$, que $u_{n+1} - u_n \sim_{n\to+\infty} a_n$, et que $\sum a_n$ diverge, le théorème de sommation des relations de comparaisons pour les séries divergentes à termes positifs donne $\displaystyle\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) \sim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{(e-1)e^k}{k}$.

4. On a de plus par téléscopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1 = \frac{e^{n+1}}{n+1} - e \sim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}}{n}$. On en conclut donc que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{e^k}{k} \sim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}}{(e-1)n}$.