Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014

Math IV - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de terme général respectif :

1. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$,
2. $v_n \in \mathbb{R}$ vérifiant $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{2}{3n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Problème 1. Le but de ce problème est d'étudier différents théorèmes d'interversion limite et intégrale pour les suites de fonctions. Pour les parties I à III, on n'utilisera pas le théorème de convergence dominée, qui sera énoncé à la partie IV. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

I. Questions préliminaires

1. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $g_n : x \longmapsto x^n$.
   (a) Déterminer le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Démontrer que $(g_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.
2. On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 2}$ définies sur $[0;1]$ par
$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2 x + 2n & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$
   (a) Faire un graphe rapide de la fonction h_n.
   (b) Démontrer que $(h_n)_n$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction h que l'on précisera.
   (c) Étudier la convergence uniforme de $(h_n)_n$ sur $[0;1]$.

II. Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

Dans cette partie, a et b sont deux réels vérifiant $a < b$. On note **THM 1** le théorème suivant :
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur le segment $[a;b]$ convergeant uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f, alors la suite de réels $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ converge vers le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Sous les hypothèses du **THM 1**, justifier l'existence de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Démontrer le théorème **THM 1**.
5. À l'aide des suites de fonctions de l'étude préliminaire, ou d'exemples simples :
   (a) Déterminer une suite de fonctions $(f_n)_n$ continues, convergeant simplement mais non uniformément sur $[0;1]$ vers une fonction f, telle que la suite de réels $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ ne converge pas vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Déterminer une suite de fonctions $(f_n)_n$ continues sur $[0;1]$ pour laquelle la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ converge vers le réel $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sans que la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne soit uniforme sur $[0;1]$.

III. Cas d'un intervalle quelconque

6. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $I = [0;+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.
   (a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction que l'on précisera.
   Indication : on pourra pour cela utiliser un résultat concernant les séries numériques.
   (b) À l'aide de la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$, montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur I.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Trouver une relation simple entre J_{n+1} et J_n ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).
   (d) Déduire des questions précédentes que le **THM 1** est faux si l'on remplace le segment $[a,b]$ par un intervalle I non borné.
7. Nous allons prouver que le **THM 1** est vrai sur un intervalle borné I. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues et intégrables sur un intervalle borné I, qui converge uniformément sur I vers une fonction f.
   (a) Justifier l'existence d'un entier naturel p, tel que, pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq 1 + |f_p(x)|$.
   (b) En déduire que f est intégrable sur I.
   (c) On note $l(I)$ la longueur de l'intervalle I. Montrer que la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ converge vers le réel $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

IV. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

8. Énoncer avec soin le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un intervalle I.
9. Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie CCP

Correction de l'exercice :

1. Le terme $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On passe sous forme exponentielle, puis on effectue un développement limité, ce qui donne

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln(1-1/n)} = e^{n^2(-1/n - 1/(2n^2) + o_{+\infty}(1/n^2))} = e^{-n-1/2+o_{+\infty}(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1/2}e^{-n} = e^{-1/2}(e^{-1})^n.$$

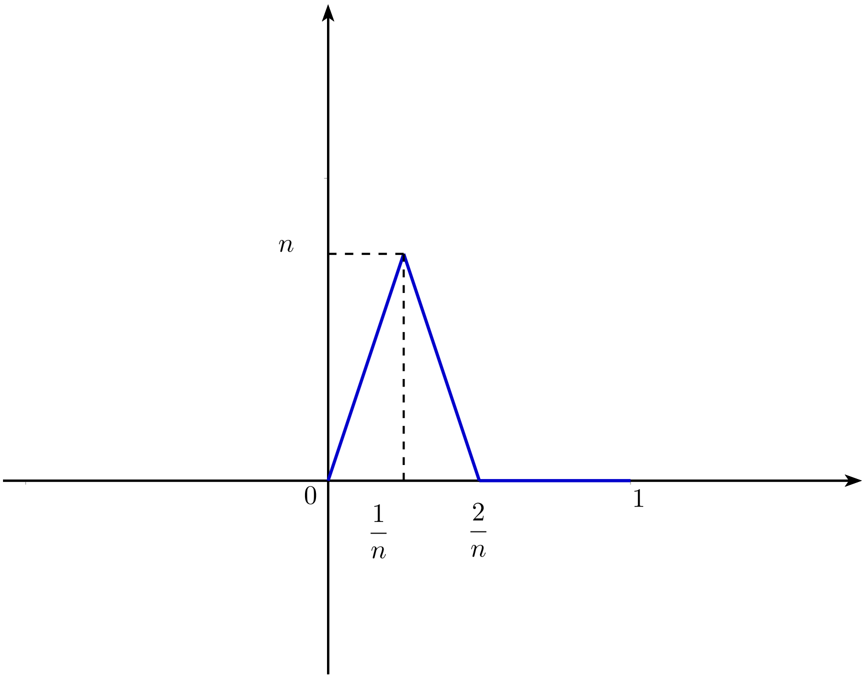
Comme la série $\sum e^{-n}$ est une série géométrique de raison e^{-1} avec $|e^{-1}| < 1$, elle est convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ est elle aussi convergente.

2. Notons $v_n = a_n + b_n$ avec $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = \dfrac{2}{3n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Puisque pour tout n, $(-1)^n a_n \geq 0$, la série $\sum a_n$ est alternée. De plus, $(|a_n|)_n$ est décroissante et converge vers 0, donc $\sum a_n$ converge d'après le critère des séries alternées. Enfin, la suite b_n vérifie $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3n}$, elle est donc positive à partir d'un certain rang. Comme la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum b_n$ diverge aussi. Par conséquent, v_n est la somme des termes généraux d'une série convergente et d'une série divergente, donc $\sum v_n$ diverge.

I. Questions préliminaires

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n(x) = x^n$. Si $|x| > 1$, $|g_n(x)|$ tend vers $+\infty$, dnc $(g_n(x))_n$ ne peut pas converger. Si $x = -1$, $g_n(x) = (-1)^n$ ne converge pas non plus. Si $x = 1$, $g_n(x) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et si $|x| < 1$, $g_n(x) = x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par suite, la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur $]-1;1]$ vers la fonction g définie par $g(x) = 0$ si $x \in]-1;1[$ et $g(1) = 1$, et ne converge pas simplement ailleurs.

   (b) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur $[0;1]$, et converge simplement vers la fonction g discontinue en 1, la suite $(g_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.



2. (a)

(b) Soit $x \in [0;1]$ fixé. Si $x=0$, pour tout $n \geq 2$, on a $h_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $x > 0$, comme $\dfrac{2}{n}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{2}{n} \leq x$. Par suite, $h_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi la suite de fonctions $(h_n)_n$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction nulle, que l'on notera h.

(c) Soit $n \geq 2$. Par construction de la fonction h_n, celle-ci est positive, croissante sur $[0;1/n]$, décroissante sur $[1/n;2/n]$ et nulle ailleurs. Par suite,

$$\|h_n - h\|_{\infty,[0;1]} = \sup_{x_i n[0;1]} |h_n(x) - h(x)| = \sup_{x\in[0;1]} h_n(x) = h_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$$

ce qui prouve que $(h_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.

II. Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

3. Puisque pour tout n, f_n est continue sur $[a;b]$ et que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a;b]$, la fonction f est continue sur $[a;b]$. Par conséquent, f est intégrable sur $[a;b]$, ce qui justifie l'existence de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a;b]$ convergeant uniformément sur $[a;b]$ vers f. On a montré à la question précédente que l'intégrale de f est bien définie. Pour tout n, on a alors

$$0 \leq \left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty,[a;b]}\,\mathrm{d}x = (b-a)\|f_n - f\|_{\infty,[a;b]}.$$

Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a;b]$, $\|f_n - f\|_{\infty,[a;b]}$ tend vers 0 losrque $n \to +\infty$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure.

Remarque : la norme infinie est bien définie puisque les fonctions sont continues sur le segment $[a;b]$ donc bornées.

5. (a) La suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 2}$ de la partie I est une suite de fonctions continues, qui converge simplement mais non uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction nulle, notée h. Soit $n \geq 2$. Puisque h_n est à valeurs positives, son intégrale sur $[0;1]$ correspond à l'aire délimitée par sa courbe et l'axe des abscisses. Puisque celle-ci définit un triangle de base $\dfrac{2}{n}$ et de hauteur n, on trouve que

$$\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n} \times n \times \frac{1}{2} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(b) On a vu que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie I est une suite de fonctions continues sur $[0;1]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction $g : x \longmapsto 0$ si $x \neq 1$ et 1 si $x = 1$. Pourtant, on a

$$\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

III. Cas d'un intervalle quelconque

6. (a) Soit $x \in [0;+\infty[$ fixé. Pour tout $n \geq 1$, on a $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$. Or on sait que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge puisque $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Par suite, son terme général tend vers 0, ce qui démontre que $f_n(x)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle, que l'on notera dans cette question f.

(b) Soit $n \geq 1$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x)$, ce qui prouve que la fonction f_n (à valeurs positives) est croissante sur $[0;n]$ et décroissante sur $[n;+\infty[$. Elle admet donc une borne supérieure, atteinte en $x = n$. Ainsi, on trouve

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0;+\infty[} = \sup_{x\in[0;+\infty[} f_n(x) = f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

ce qui donne avec la formule de Stirling

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0;+\infty[} = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On en déduit que $\|f_n - f\|_{\infty,[0;+\infty[}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et ainsi la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0;+\infty[$ vers la fonction nulle.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une intégration par parties (valide car les fonctions intervenant sont de classe $\mathcal{C}^1$) pour trouver

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^n e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = J_n. \end{aligned}$$

(d) On vient de voir que la suite $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur $I = [0;+\infty[$ qui converge uniformément sur I vers la fonction nulle f. De plus, une récurrence immédiate implique que pour tout $n \geq 1$,

$$J_n = J_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Le théorème **THM 1** est donc faux si l'on remplace le segment I par un intervalle non borné.

7. (a) Puisque la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I, les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang n_0, et la suite numérique $(\|f_n - f\|_{\infty,I})_{n\geq n_0}$ converge vers 0. Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $\|f_n - f\|_{\infty,I} \leq \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1$, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $\|f_n - f\|_{\infty,I} \leq 1$. En particulier, ceci est valable pour $n = p$, ce qui donne

$$\|f_p - f\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} |f_p(x) - f(x)| \leq 1.$$

Ceci implique en particulier que pour tout $x \in I$, $|f_p(x) - f(x)| \leq 1$. Or d'après l'inégalité triangulaire inversée, on a aussi $|f_p(x) - f(x)| \geq ||f_p(x)| - |f(x)|| \geq |f(x)| - |f_p(x)|$. En utilisant l'inégalité précédente, on trouve alors, pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq 1 + |f_p(x)|$.

(b) Tout d'abord, comme chacune des fonctions f_n est continue et que $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f, la fonction f est continue sur I. Puisque la fonction f_p est intégrable sur I, $|f_p|$ l'est aussi. De plus, comme I est borné, la fonction constante égale à 1 est intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_I |1|\,\mathrm{d}x \leq M < +\infty$. Comme $|f| \leq 1 + |f_p|$ sur I, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est finie, donc la fonction f est intégrable sur I.

(c) Notons $l(I)$ la longueur de l'intervalle I (celle-ci est finie car I est borné). La question précédente justifie l'existence du réel $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut alors écrire, pour $n \geq n_0$,

$$\left|\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_I f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_I \|f_n - f\|_{\infty,I}\,\mathrm{d}x = l(I)\|f_n - f\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui prouve que le **THM 1** est vrai si l'on remplace $[a;b]$ par un intervalle borné I.

VI. Théorème de convergence dominée

8. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que :

$$\forall n, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

alors la fonction f est intégrable sur I, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, posons $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2}$.

• Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue donc continue par morceaux sur $I = [0; +\infty[$.

• Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé, alors $\dfrac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par continuité de la fonction $u \longmapsto e^{\sin(u)}$ en 0, $e^{\sin(x/n)}$ converge vers $e^{\sin(0)} = 1$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^+$. Puisque $-1 \leq \sin(x/n) \leq 1$, la croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ implique

$$|f_n(x)| = \frac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2} \leq \frac{e}{1+x^2}.$$

Posons $\varphi : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{e}{1+x^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$ (en particulier sur $[0; A]$, pour $A > 0$), et équivalente lorsque $x \to +\infty$ à $\dfrac{e}{x^2}$ avec $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ intégrable (fonction de Riemann d'exposant $2 > 1$). Par suite φ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On aurait aussi pu dire que φ est continue, à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $X > 0$,

$$\int_0^X \varphi(x)\,\mathrm{d}x = e\left[\arctan(x)\right]_0^X = e\arctan(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e\pi}{2} < +\infty,$$

ce qui prouve que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après le théorème de convergence dominée, la limite recherchée est donc égale à

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x/n)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$