Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2014-2015

Math III - Cursus préparatoire 2A — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie CCP - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Le but de ce problème est d'étudier la nature de certaines séries de la forme $\sum \dfrac{\cos(u(n))}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à préciser.

Les parties I, II, et III sont indépendantes. La partie IV utilise les résultats des trois premières parties.

I. Étude préliminaire

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi} |\cos(t)| \, \mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/2+N\pi} \frac{|\cos(t)|}{t} \, \mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{\pi + 2k\pi}$.

   (c) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ n'est pas absolument intégrable sur $[1; +\infty[$.

2. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} \, \mathrm{d}t$ est semi-convergente.

II. Étude des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$

Pour tout réel α, on désigne par f_α et g_α les fonctions définies sur $[1; +\infty[$ par :

$$f_\alpha(t) = \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad g_\alpha(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} \quad \forall t \geq 1.$$

3. Étude des fonctions f_α et g_α :

   (a) Justifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions f_α et g_α sont dérivables sur $[1; +\infty[$ et expliciter les dérivées de $f_{\alpha-1}$ et $g_{\alpha-1}$.

   (b) Pour $\alpha > 0$, montrer que f_α et g_α admettent des limites finies en $+\infty$ que l'on précisera.

   (c) Pour $\alpha \leq 0$, montrer qu'aucune des fonctions f_α et g_α n'admet de limite finie en $+\infty$.

4. On note I_α (resp. J_α) l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \left(\text{resp. } \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t\right)$.

   (a) Montrer que f_α et g_α sont absolument intégrables sur $[1; +\infty[$ si $\alpha > 1$.

   (b) Soit $x > 1$.

      i. À l'aide de la question 3a, calculer les intégrales $\displaystyle\int_1^x f_\alpha(t) \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^x g_\alpha(t) \, \mathrm{d}t$. On exprimera le résultat à l'aide des fonctions f_β et g_γ (pour $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ à déterminer).

      ii. Pour $\alpha > 1$, justifier l'existence de I_α et de J_α et donner la valeur de ces intégrales.

      iii. Montrer que pour tout $\alpha \leq 1$, l'intégrale I_α est divergente. On admet pour la suite qu'il en est de même pour J_α.

III. Étude d'une série à l'aide d'une intégrale généralisée

Dans toute cette partie, on considère une fonction $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, dont la dérivée f' est absolument intégrable sur $[1; +\infty[$. On associe à cette fonction la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \int_n^{n+1} (n + 1 - t) f'(t) \, \mathrm{d}t \quad \forall n \geq 1.$$

5. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
6. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in]n; n+1]$, on a
$$\int_n^x (x - t) f'(t) \, \mathrm{d}t = \int_n^x f(t) \, \mathrm{d}t - (x - n) f(n).$$
Le résultat est-il encore vrai si $x = n$?
7. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une expression de u_n à l'aide de $f(n)$, puis montrer que les séries $\sum f(n)$ et $\sum \int_n^{n+1} f(t) \, \mathrm{d}t$ sont de même nature.
8. Le but de cette question est de montrer que la série $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ sont de même nature. On introduit pour cela la fonction $F : x \in [1; +\infty[\longmapsto \int_1^x f(t) \, \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ converge, il en est de même de la série $\sum f(n)$.
   (b) Réciproquement, supposons que la série $\sum f(n)$ converge.
      i. Soit $x > 2$. Donner une expression de $F(x)$ à l'aide d'une somme partielle de $\sum \int_n^{n+1} f(t) \, \mathrm{d}t$, $\lfloor x \rfloor$ (la partie entière inférieure de x), f' et $f(\lfloor x \rfloor)$.
      ii. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

IV. Applications

9. (a) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, les résultats de la partie III s'appliquent à la fonction f_α.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{\cos(\ln(n))}{n^\alpha}$, pour tout $\alpha > 0$.
10. Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$. (On pensera à utiliser les résultats démontrés dans la partie I.)

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie CCP

I. Étude préliminaire

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue le changement de variable $u = t - k\pi$ pour obtenir :
$$\int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi} |\cos(t)|\ \mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos(u)|\ \mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\cos(u)\,\mathrm{d}u = [-\sin(u)]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 2.$$

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Grâce à la relation de Chasles, on peut écrire
$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi/2+N\pi} \frac{|\cos(t)|}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{\pi/2+(k+1)\pi}\,\mathrm{d}t \qquad \text{puisque } t \in [\pi/2+k\pi;\pi/2+(k+1)\pi] \\
&\geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{\pi/2+(k+1)\pi} \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{\pi+2k\pi}
\end{aligned}$$

   (c) Notons $G : x \in [1;+\infty[\longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{|\cos(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$. Puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue, elle est absolument intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ converge, ce qui équivaut encore à G admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Or par positivité de $t \longmapsto \dfrac{|\cos(t)|}{t}$, on a la minoration, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$G(\pi/2+N\pi) \geq \int_{\pi/2}^{\pi/2+N\pi} \frac{|\cos(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{\pi+2k\pi}$$
Puisque $\dfrac{4}{\pi+2n\pi} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\pi n}$ et que la série harmonqiue $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, il en est de même pour la série $\sum \dfrac{4}{\pi+2n\pi}$ par comparaison de séries à termes positifs, ce qui démontre que $\lim\limits_{N\to+\infty} G(\pi/2+\pi N) = +\infty$. Par conséquent, G n'admet pas de limite finie en $+\infty$, donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ n'est pas absolument intégrable sur $[1;+\infty[$.

2. Soit $X > 1$, on effectue une intégration par parties avec les fonctions $u : t \longmapsto \sin(t)$ et $v : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;X]$:
$$\begin{aligned}
\int_1^X \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sin(X)}{X} - \sin(1) + \int_1^X \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$
Or $0 \leq \dfrac{|\sin(X)|}{X} \leq \dfrac{1}{X}$, donc par théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\sin(X)}{X} = 0$, et la majoration $\dfrac{|\sin(t)|}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ valable pour tout $t \geq 1$ montre l'absolue intégrabilité de $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ sur $[1;+\infty[$ par comparaison de fonctions positives à une fonction de Riemann d'exposant > 1. Par suite, $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $X \to +\infty$, à savoir $-\sin(1) + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, ce qui démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
La fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ n'étant pas absolument intégrable sur $[1;+\infty[$, l'intégrale précédente est donc semi-convergente.

II. Étude des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

3. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, les composées $\cos\circ\ln$ et $\sin\circ\ln$ sont dérivables sur $[1;+\infty[$, donc f_α et g_α sont dérivables sur $[1;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais. Ceci étant valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il en est de même pour $f_{\alpha-1}$ et $g_{\alpha-1}$. Après calculs, on obtient, pour tout $t \geq 1$,

$$f'_{\alpha-1}(t) = -\frac{\sin(\ln(t)) + (\alpha-1)\cos(\ln(t))}{t^\alpha} = -g_\alpha(t) + (1-\alpha)f_\alpha(t)$$

et

$$g'_{\alpha-1}(t) = \frac{\cos(\ln(t)) - (\alpha-1)\sin(\ln(t))}{t^\alpha} = f_\alpha(t) + (1-\alpha)g_\alpha(t)$$

(b) Soit $\alpha > 0$. Pour tout $t \geq 1$, on a les encadrements

$$0 \leq |f_\alpha(t)| = \frac{|\cos(\ln(t))|}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad 0 \leq |g_\alpha(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

ce qui démontre que $\lim\limits_{t\to+\infty} f_\alpha(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g_\alpha(t) = 0$.

(c) Soit $\alpha \leq 0$. Pour prouver que f_α et g_α n'admettent pas de limite finie en $+\infty$, on exhibe une suite tendant vers $+\infty$ dont l'image n'admet pas de limite, ou tend vers $+\infty$.

• Si $\alpha < 0$, on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = e^{2\pi n}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \geq 1$ et on a :

$$f_\alpha(t_n) = \frac{\cos(\ln(e^{2\pi n}))}{e^{2\pi n\alpha}} = e^{-2\pi n\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{car } -\alpha > 0.$$

De même, en utilisant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = e^{\pi/2+2\pi n}$, on démontre que la fonction g_α n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

• Si $\alpha = 0$, on peut remarquer que $f_0(e^{\pi n}) = \cos(\pi n) = (-1)^n$ qui n'admet pas de limite en lorsque $n \to +\infty$, et que $g_0(e^{\pi/2+\pi n}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n$, ce qui démontre le résultat voulu pour tout $\alpha \leq 0$.

4. (a) Supposons $\alpha > 1$, on a vu que les fonctions f_α et g_α sont continues sur $[1;+\infty[$. On dispose encore des encadrements : pour tout $t \geq 1$, $\left|f_{\alpha(t)}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $\left|g_{\alpha(t)}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$. De plus, la fonction de Riemann $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ car $\alpha > 1$, donc par comparaison de fonctions positives, f_α et g_α sont absolument intégrables sur $[1;+\infty[$.

(b) i. On a vu à la question 3a que

$$f'_{\alpha-1} = -g_\alpha + (1-\alpha)f_\alpha \quad \text{et} \quad g'_{\alpha-1} = f_\alpha + (1-\alpha)g_\alpha$$

En multipliant la première équation par $(1-\alpha)$ et en l'additionnant àla seconde, on trouve

$$(1-\alpha)f'_{\alpha-1} + g'_{\alpha-1} = \underbrace{(1+(1-\alpha)^2)}_{\neq 0} f_\alpha \quad \text{d'où} \quad f_\alpha = \frac{(1-\alpha)f'_{\alpha-1} + g'_{\alpha-1}}{1+(1-\alpha)^2}$$

puis en multipliant la seconde équation par $(1-\alpha)$ et en lui retranchant la première

$$(1-\alpha)g'_{\alpha-1} - f'_{\alpha-1} = (1+(1-\alpha)^2)g_\alpha \quad \text{d'où} \quad g_\alpha = \frac{(1-\alpha)g'_{\alpha-1} - f'_{\alpha-1}}{1+(1-\alpha)^2}.$$

En remplaçant dans les intégrales demandées, comme pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a $f_\beta(1) = 1$ et $g_\beta(1) = 0$, on obtient finalement :

$$\int_1^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(1-\alpha)(f_{\alpha-1}(x)-1) + g_{\alpha-1}(x)}{1+(1-\alpha)^2} \quad \text{et} \quad \int_1^x g_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(1-\alpha)g_{\alpha-1}(x) - f_{\alpha-1}(x) + 1}{1+(1-\alpha)^2}.$$

ii. Soit $\alpha > 1$, on a vu à la question 4a que les fonctions f_α et g_α sont absolument intégrables sur $[1;+\infty[$, par conséquent, les intégrales I_α et J_α convergent (même absolument), donc elles existent. On a alors

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\alpha)(f_{\alpha-1}(x)-1)+g_{\alpha-1}(x)}{1+(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha-1}{1+(1-\alpha)^2}$$

$$\int_1^{+\infty} g_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x g_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\alpha)g_{\alpha-1}(x)-f_{\alpha-1}(x)+1}{1+(1-\alpha)^2} = \frac{1}{1+(1-\alpha)^2}$$

puisque $\alpha-1>0$ (d'après l'étude des limites des fonctions f_β et g_β pour $\beta\in\mathbb{R}$).

iii. Soit $\alpha \le 1$. On ne peut pas directement utiliser le résultat sur l'absence de limite finie des fonctions f_β et g_β ($\beta\in\mathbb{R}$) pour conclure. Cependant, on peut réutiliser une partie de la démonstration. Posons pour $n\in\mathbb{N}$, $x_n = \frac{\pi}{2}+n\pi$, alors $x_n > 1$ et l'on a

$$\int_1^{x_n} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(1-\alpha)(f_{\alpha-1}(x_n)-1)+g_{\alpha-1}(x_n)}{1+(1-\alpha)^2} = \frac{(\alpha-1)+(-1)^n e^{(1-\alpha)(\pi/2+n\pi)}}{1+(1-\alpha)^2}$$

qui n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$. Par suite, on a trouvé une primitive de f_α qui n'admet pas de limite en $+\infty$, donc l'intégrale impropre I_α est divergente.

III. Étude d'une série à l'aide d'une intégrale généralisée

5. Pour tout $n\ge 1$, on a

$$|u_n| = \left|\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_n^{n+1}|n+1-t|\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

puisque pour tout $t\in[n;n+1]$, $0\le n+1-t\le 1$. Soit $N\ge 1$, on peut alors majorer la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{N}|u_n| \le \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^{N+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_1^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$$

par positivité et intégrabilité de $|f'|$ sur $[1;+\infty[$. La suite des sommes partielles de $\sum|u_n|$ est une suite croissante majorée, donc elle converge, ce qui démontre que $\sum u_n$ converge absolument.

6. Soit $n\ge1$, une intégration par parties avec les fonctions f et $t\longmapsto x-t$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n;x]$ donne

$$\int_n^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t = [(x-t)f(t)]_n^x + \int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t = -(x-n)f(n) + \int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $x=n$, toutes les quantités intervenant sont nulles, donc l'égalité est encore vraie.

7. En appliquant l'égalité précédente avec $x=n+1$, on obtient $u_n = -f(n)+\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$, d'où, pour tout $n\ge 1$, $f(n) = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - u_n$. Or la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente. Par suite, si $\sum\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $f(n)$ est la différence des termes généraux de deux séries convergentes, donc $\sum f(n)$ converge, et si $\sum\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, $f(n)$ est la différence du terme général d'une série divergente avec celui d'une série convergente, donc $\sum f(n)$ diverge. Il s'ensuit que les séries $\sum f(n)$ et $\sum\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

8. On note $F : x\in[1;+\infty[\longmapsto \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (l'unique primitive de f s'annulant en 1).

(a) Si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors F admet une limite finie l en $+\infty$. Par suite, on a (pour $N \geq 1$) :

$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

ce qui démontre la convergence de $\sum \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et donc celle de $\sum f(n)$.

(b) Supposons désormais que la série $\sum f(n)$ converge, alors $\sum \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

i. Soit $x > 2$, on a d'après la question 6, puisque $1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{\lfloor x \rfloor} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x \rfloor}^x (x-t) f'(t)\,\mathrm{d}t + (x - \lfloor x \rfloor) f(\lfloor x \rfloor) \end{aligned}$$

ii. Comme $\sum f(n)$ converge, il en est de même de la série $\sum \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ (car $\lfloor x \rfloor \to +\infty$ aussi). De plus, on a

$$0 \leq |(x - \lfloor x \rfloor) f(\lfloor x \rfloor)| \leq |f(\lfloor x \rfloor)| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque le terme général d'une série convergente tend vers 0. Enfin, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$, on a

$$0 \leq \left| \int_{\lfloor x \rfloor}^x (x-t) f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{\lfloor x \rfloor}^x |(x-t)|\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{\lfloor x \rfloor}^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre la convergence de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$ vers une limite finie, et ainsi la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

IV. Application

9. (a) Soit $\alpha > 0$, on a déjà vu que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ et $f'_\alpha = -g_{\alpha+1} - \alpha f_{\alpha+1}$. Puisque $\alpha + 1 > 0$, les fonctions $f_{\alpha+1}$ et $g_{\alpha+1}$ sont absolument intégrables sur $[1;+\infty[$ donc il en est de même pour f'_α. On peut donc appliquer les résultats de la partie III à la fonction f_α.

(b) Par conséquent, la série $\sum \dfrac{\cos(\ln n)}{n^\alpha}$, qui n'est autre que la série $\sum f_\alpha(n)$, est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, d'après l'étude effectuée à la partie II, si $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum f_\alpha(n)$ est divergente, et si $\alpha > 1$, elle est convergente.

10. Notons $f : t \in [1;+\infty[\longmapsto \dfrac{\cos(\sqrt{t})}{t}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ comme quotient de deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :

$$\forall t \geq 1, \quad |f'(t)| = \left| \frac{-\sqrt{t}\sin(\sqrt{t})/2 - \cos(\sqrt{t})}{t^2} \right| \leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2}.$$

Puisque les fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ avec $\beta > 1$ sont intégrables sur $[1;+\infty[$, f' est absolument intégrable sur $[1;+\infty[$. Il s'ensuit que la série $\sum \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or pour $x > 1$, on effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ pour obtenir

$$\int_1^x \frac{\cos(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u < +\infty$$

puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est convergente. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il en résulte que $\sum \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ est convergente.