Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Math IV - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.***

Le but du problème est de calculer l'intégrale de Gauss, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ en utilisant une suite de fonctions qui converge vers $x \longmapsto e^{-x^2}$.

Questions préliminaires :

1. Démontrer que l'intégrale I est bien définie.
2. On définit sur $[0; 1[$ la fonction ψ définie par $\psi(t) = t + \ln(1 - t)$.
   (a) Étudier les variations et le signe de ψ.
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de ψ.

I. Intégration sur un intervalle non borné de la limite d'une suite de fonctions

3. Citer avec précision le théorème de convergence dominée.

Ce théorème n'étant pas au programme du concours CCP, on ne pourra pas l'utiliser dans ce problème. Ainsi, si $(f_n)_n$ est une suite convergente de fonctions définies sur l'intervalle *non borné* $[0; +\infty[$, on souhaite trouver une condition suffisante pour pouvoir permuter limite et intégrale, c'est-à-dire avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Le but de cette partie est donc de donner cette condition suffisante.

A. La convergence uniforme est insuffisante :

4. Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0; +\infty[$ la suite de fonctions $(g_n)_n$ par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} & \text{si } x \in [0; n[\\ -\dfrac{x}{n^2} + \dfrac{2}{n} & \text{si } x \in [n; 2n[\\ 0 & \text{si } x \in [2n; +\infty[. \end{cases}$$

   (a) Représenter le graphe de g_2.
   (b) Soit $n \geq 1$, montrer que g_n est continue sur $[0; +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser des considérations géométriques).
   (c) Montrer que la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$ vers la fonction nulle.
   A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$?

B. Une condition suffisante : convergence uniforme sur tout segment et domination

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues sur $[0; +\infty[$ qui converge uniformément sur tout segment $[0; a]$ inclus dans $[0; +\infty[$ avec $a > 0$ vers une fonction f. On suppose de plus que la suite $(f_n)_n$ est dominée, c'est-à-dire qu'il existe une fonction g continue sur $[0; +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ converge et telle que, pour tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq g$.

5. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.
6. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) On définit sur $[0;+\infty[$ la fonction φ par $\varphi(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de φ en $+\infty$ puis justifier l'existence d'une réel $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

II. Application au calcul de l'intégrale de Gauss

On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $[0;+\infty[$ pour tout entier naturel n non nul par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0;\sqrt{n}[\\ 0 & \text{si } x \in [\sqrt{n};+\infty[. \end{cases}$$

On note aussi f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

7. Soit x un réel strictement positif.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $f_n(x) \leq f(x)$ (on pourra utiliser la fonction ψ).
   (b) Montrer que pour tout entier n vérifiant $n > x^2$, on a $|f_n(x) - f(x)| = e^{-x^2}\left(1 - e^{n\psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}\right)$.
8. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f sur $[0;+\infty[$.
9. Soit a un réel strictement positif. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0;a]$ vers f.
10. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

III. Un équivalent des intégrales de Wallis et une application

Pour tout entier naturel n, on définit la suite des intégrales de Wallis $(I_n)_n$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

10. (a) Calculer I_0 et I_1.
    (b) Justifier que $(I_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs.
    (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$.
11. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la suite $(u_n)_n$ par $u_n = nI_{n-1}I_n$. Montrer que $(u_n)_n$ est une suite constante et en déduire que $I_{n-1}I_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
12. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.
    (b) En déduire que $I_n \sim_{+\infty} I_{n-1}$.
    (c) Donner alors un équivalent de $(I_n)_n$ à l'infini.
13. Application : Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite $(J_n)_n$ par $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.
    (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $J_n = \sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x$.
    (b) En déduire la limite de $(J_n)_n$ en $+\infty$.
    (c) En déduire la valeur de I.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie CCP

Questions préliminaires :

1. Notons $f : x \in [0;+\infty[\longmapsto e^{-x^2}$. Alors f est positive, continue sur $[0;+\infty[$ donc (absolument) intégrable sur tout segment de $[0;+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-x^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissance comparée, et la fonction de Riemann $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est (absolument) intégrable au voisinage de $+\infty$. Par suite, f est (absolument) intégrable sur $[0;+\infty[$ donc I existe.

2. (a) La fonction ψ est dérivable sur $[0;1[$ et pour tout $t \in [0;1[$, on a $\psi'(t) = 1 - \frac{1}{1-t} = \frac{-t}{1-t} \leq 0$. Ainsi, ψ est décroissante sur $[0;1[$ et puisque $\psi(0) = 0$, $\psi(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0;1[$.

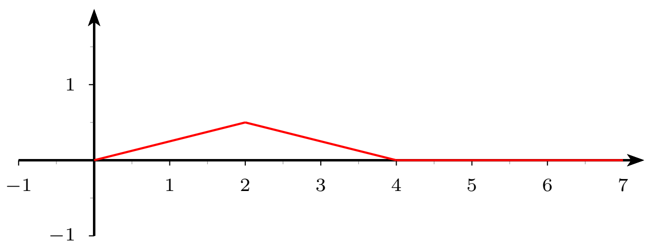
   (b) On sait que $-\ln(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ quand u tend vers 0, donc $\psi(t) = t + \ln(1-t) = t - t - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2) = -\frac{t^2}{2} + o_0(t^2)$.

I. Intégration sur un intervalle non borné d'une suite de fonctions

3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux, et qu'il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable sur I telle que, pour tout n, pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq g(x)$. Alors pour tout n, f_n et f sont intégrables sur I et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A. La convergence uniforme est insuffisante :

4. 

5. Soit $n \geq 1$, g_n est continue sur $[0;n[$, $]n;2n[$ et sur $]2n;+\infty[$. De plus, $\lim_{x\to n^-} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ et $\lim_{x\to n^+} = -\frac{n}{n^2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n}$, donc g_n est continue en n. On montre de même que les limites en $2n^-$ et $2n^+$ sont égales, don g_n est continue sur $[0;+\infty[$.

   Pour calculer $\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$, on peut faire le calcul directement, ou remarquer que cela représente l'aire sous la courbe qui est constituée de deux fois l'aire d'un triangle rectange de base n et de hauteur $\frac{1}{n}$, donc l'intégrale cherchée vaut 1.

6. On commence par la convergence simple. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (en fait $n_0 = [x] + 1$) tel que pour tout $n \geq n_0$, $n > x_0$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $g_n(x_0) = \frac{x_0}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement vers 0.

   De plus, pour tout $n \geq 1$, si $x \in [0;n[$, alors $|g_n(x)| = \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ par croissance de $t \longmapsto \frac{t}{n}$. Si $x \in [n;2n[$, alors $|g_n(x)| = -\frac{x}{n^2} + \frac{2}{n} \leq g_n(n) = \frac{1}{n}$ par décroissance de $t \longmapsto -\frac{t}{n^2} + \frac{2}{n}$. On obtient donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$|g_n(x)| \leq \dfrac{1}{n}$ ce qui implique $0 \leq \|g_n\|_{\infty,[0;+\infty[} \leq \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $(g_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;+\infty[$.
Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, il n'y a pas égalité.

B. Une condition suffisante : convergence uniforme sur tout segment et domination

5. Puisque pour tout $a > 0$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0;a]$ et que pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $[0;a]$, on en déduit que f est continue sur $[0;a]$. Comme ceci est valable pour tout $a > 0$, cela implique que f est continue sur $[0;+\infty[$.

   De plus, pour tout $x \in [0;+\infty[$, pour tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$. Comme la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $|f(x)| \leq g(x)$ (par continuité de la fonction valeur absolue). Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, et par suite $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

6. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$, on a $\displaystyle\int_t^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.
   D'après la définition de la limite, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|\varphi(t)| < \varepsilon'$.
   En prenant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{4}$, et en remarquant que g est positive donc φ est aussi positive, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geq A$, $\varphi(t) < \dfrac{\varepsilon}{4}$ et en particulier $\varphi(A) = \displaystyle\int_A^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x < \dfrac{\varepsilon}{4}$.
   (b) Soit $n \geq 1$, on a :
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x + 2\int_A^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$
   (c) Comme $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0;A]$ vers f, on a $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2A}$. Mais alors pour tout $n \geq n_0$,
$$\int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_0^{+\infty} \|f_n - f\|_\infty\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \leq A\frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

II. Application au calcul de l'intégrale de Gauss

7. Soit x un réel strictement positif.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [\sqrt{n};+\infty[$, alors $f_n(x) = 0 \leq e^{-x^2} = f(x)$. Soit $x \in [0;\sqrt{n}[$, alors $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)}$. Or on a vu que $\psi(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0;1[$, donc $\ln(1-t) \leq -t$ pour tout $t \in [0;1[$. Comme $x \in [0;\sqrt{n}[$, on a $\dfrac{x^2}{n} \in [0;1[$ d'où $\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right) \leq -\dfrac{x^2}{n}$ et par conséquent $f_n(x) \leq f(x)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > x^2$ c'est-à-dire $\sqrt{n} > x$ alors

$$|f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x) = e^{-x^2} - e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)} = e^{-x^2}\left(1 - e^{n\left(\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)+\frac{x^2}{n}\right)}\right) = e^{-x^2}\left(1 - e^{n\psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}\right).$$

8. Soit $x_0 \in [0;+\infty[$. Comme $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt{n} > x_0$. Pour tout $n \geq n_0$, on a alors $|f_n(x_0) - f(x_0)| = e^{-x^2}\left(1 - e^{n\psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}\right)$. Or si $x_0 \neq 0$, $\psi\left(\dfrac{x_0^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x_0^4}{n^2}$ d'où $n\psi\left(\dfrac{x_0^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x_0^4}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et si $x_0 = 0$, alors $f_n(x_0) = e^0 = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = e^0$. Ainsi, $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$ vers la fonction f.

9. Soit a un réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} > a$. Pour tout $x \in]0;a]$, $|f_n(x) - f(x)| = e^{-x^2}\left(1 - e^{n\psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}\right)$. En outre, la fonction ψ est décroissante sur $[0;1[$ donc $x \longmapsto 1 - e^{n\psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}$ est croissante. On en déduit $|f_n(x) - f(x)| \leq 1 - e^{n\psi\left(\frac{a^2}{n}\right)}$. Puisque cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$, on en déduit que $\|f_n - f\|_{\infty,[0;a]} \leq 1 - e^{n\psi\left(\frac{a^2}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour la même raison que ci-dessus. Ainsi, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0;a]$.

10. On a, pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$, de plus, pour tout $a > 0$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0;a]$ et enfin pour tout $n \geq 1$, $|f_n| = f_n \leq f$ avec f intégrable d'après la question 1 du préliminaire. D'après le résultat de la partie I, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

III. Un équivalent des intégrales de Wallis et une application

11. (a) Par calcul direct, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(b) Comme pour tout $x \in]0;\pi/2]$, $\sin x > 0$, on en déduit que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On fait une intégration par parties (avec $n \geq 1$) :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)\sin^n(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2(x)\sin^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = nI_{n-1} - nI_{n+1} \end{aligned}$$

d'où $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$.

12. On le démontre par récurrence. On a $u_1 = I_0I_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Supposons que pour un certain $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{\pi}{2}$, alors $u_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = (n+1)I_n\dfrac{n}{n+1}I_{n-1} = u_n = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui implique $I_{n-1}I_n = \dfrac{\pi}{2n}$.

13. (a) Pour tout $x \in [0;\pi/2]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$ et en intégrant cette inégalité, on obtient $I_{n+1} \leq I_n$. Par suite, pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.

(b) Puisque $I_{n-1} > 0$, on peut diviser par I_{n-1} dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

Le terme de gauche tendant vers 1 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes implique alors $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

(c) On a vu que $I_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ et d'après la question précédente, $I_nI_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n^2$, d'où $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.

14. (a) Soit $n \geq 1$. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ puis $u = \cos(t)$ et on trouve

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - u^2\right)^n \sqrt{n}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2(t)\right)^n \sin t\,\mathrm{d}t = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,\mathrm{d}t.$$

(b) Ainsi,

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(2n+1)}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(c) On en déduit que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.