**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

---

**Partie CCP - Devoir numéro 1**

---

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
*Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ;* ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Dans tout le problème, on fixe un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un nombre réel $\alpha$. Notations :

• si $p$ et $q$ sont deux nombres entiers naturels $p \leq q$, alors on désigne par $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des nombres entiers naturels $k$ tels que $p \leq k \leq q$,

• si $k \in \mathbb{N}$, alors on note $\mathbb{C}_k[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus $k$ à coefficients complexes.

# Partie 1 : un ensemble de matrices

On note $\mathbb{J}$ l'ensemble de toutes les matrices du type $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{C}^*$. On note également $I$ la matrice diagonale d'ordre 3 dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

1. L'ensemble $\mathbb{J}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?
2. On note $N$ la matrice $J_0$. Calculer $N^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   En déduire que, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe trois suites complexes $(u_p)_p, (v_p)_p$ et $(w_p)_p$ dont on exprimera le terme général à l'aide de $\lambda$ telles que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (J_\lambda)^p = u_p \cdot I + v_p \cdot N + w_p \cdot N^2.$$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(J_\lambda)^k$.
   Montrer qu'il existe une suite complexe $(x_p)_{p \geq 0}$ que l'on explicitera, telle que pour tout entier $p \geq 2$, on ait :
   $$S_p = x_p \cdot I + x_{p-1} \cdot N + \frac{1}{2} x_{p-2} \cdot N^2.$$
4. *On admettra le résultat suivant : si $z \in \mathbb{C}^*$ alors* $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{z^k}{k!} = e^z$.
   Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $a_{i,j}(p)$ le coefficient de $S_p$ situé sur la ligne $i$ et sur la colonne $j$ (avec $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$).
   Déterminer la matrice $S$ dont le coefficient général $a_{i,j}$ est égal à :
   $$a_{i,j} = \lim_{p \to +\infty} a_{i,j}(p).$$

# Partie 2 : étude d'une application linéaire

On note $E$ l'ensemble de toutes les applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On rappelle que $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les lois suivantes : si $f$ et $g$ sont deux telles applications et $\lambda$ un nombre complexe, alors $f + g$ et $\lambda f$ sont définies comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

On note d'autre part $[0]$ l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, à savoir $[0] : x \in \mathbb{R} \longmapsto 0$.

5. Pour $f \in E$, on appelle $g$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x + 2\pi)$. Montrer avec soin que l'application $\varphi : f \longmapsto \varphi(f) = g$ est un endomorphisme de $E$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $E_k$ le sous-ensemble de $E$ constitué des applications du type : $x \longmapsto P(x) \cdot e^{i\alpha x}$ avec $P \in \mathbb{C}_k[X]$.

6. (a) Montrer que $E_n$ est le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par la famille $\mathcal{F} = (f_k)_{0 \leq k \leq n}$ où l'on a noté :

$$f_k : x \longmapsto x^k e^{i\alpha x} \quad \forall k \in [\![0, n]\!].$$

Montrer alors que $\mathcal{F}$ est une base de $E_n$.

(b) Exprimer simplement $E_{n+1}$ à l'aide de $E_n$ et de la droite vectorielle $\{\lambda f_{n+1} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

7. (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Écrire $\varphi(f_k)$ comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$.

(b) En déduire que $\varphi(E_n) \subset E_n$.

8. On désigne par $m$ l'endomorphisme de $E_n$ défini par : pour $f \in E_n$, $m(f) = \varphi(f)$.
On note $M$ la matrice de $m$ relativement à la base $\mathcal{F}$. Montrer que $M$ est une matrice triangulaire supérieure (d'ordre $n+1$) que l'on précisera (on pourra faire figurer dans cette matrice uniquement les coefficients nuls, les coefficients diagonaux, ainsi que ceux situés juste au-dessus de la diagonale).

9. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, le déterminant de l'endomorphisme $m^p$.

## Partie 3 : changement de base

On reprend toutes les notations de la partie précédente. On note Id l'application identité de $E_n$, à savoir Id : $f \longmapsto f$. On considère un nouvel endomorphisme : $l = m - (e^{2i\pi\alpha})\,\mathrm{Id}$.

10. (a) Vérifier que $l(f_0)$ est l'application nulle $[0]$.

(b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que $l(f_{k+1})$ est un élément de $E_k$ et que sa composante selon $f_k$ vaut : $2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}$.

(c) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $E_k \subset \mathrm{Ker}(l^{k+1})$.

(d) Établir la propriété suivante :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad l^k(f_k) = (k!(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}) f_0.$$

(e) En déduire que $l^n(f_n) \neq [0]$ et $l^{n+1}(f_n) = [0]$.

11. Montrer que $\mathcal{B} = (l^n(f_n), l^{n-1}(f_n), \ldots, l(f_n), f_n)$ est une base de $E_n$.

12. Déterminer la matrice de $l$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

13. En déduire la matrice de $m$ dans la base $\mathcal{B}$. Dans la suite, on notera $M'$ cette matrice.

14. On note $\mathbb{J}_{n+1}$ l'ensemble des matrices carrées $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2}$ à coefficients complexes vérifiant les quatre conditions suivantes :
   - $a_{1,1}$ est de module 1,
   - $\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$,
   - $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i+1} = 1$,
   - $\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $(j - i \notin \{0, 1\} \Leftrightarrow a_{i,j} = 0)$.

   Montrer que l'application qui à un nombre réel $\alpha$ associe la matrice $M'$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{J}_{n+1}$.

**Correction du Devoir Surveillé 1 - partie CCP**

# Partie 1 - un ensemble de matrices

1. La matrice nulle, élément neutre de l'addition des matrices, n'appartient pas à $\mathbb{J}$, donc $\mathbb{J}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2. On a $N^0 = I$, $N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et pour $p \geq 3$, $N^p$ est la matrice nulle (notée $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$).

   Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $J_\lambda = \lambda I + N$. Puisque $I$ et $N$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, on obtient donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (J_\lambda)^p = (\lambda I + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\lambda I)^{p-k} N^k.$$

   D'où pour tout $p \geq 2$, $(J_\lambda)^p = \lambda^p I + p\lambda^{p-1} N + \dfrac{p(p-1)}{2} \lambda^{p-2} N^2$. De plus, pour $p = 0$, le membre de droite de l'égalité précédente vaut $I = (J_\lambda)^0$, et pour $p = 1$, le membre de droite vaut $\lambda I + N = J_\lambda$. En conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $(J_\lambda)^p = u_p I + v_p N + w_p N^2$, avec $u_p = \lambda^p$, $v_p = p\lambda^{p-1}$ et $w_p = \dfrac{p(p-1)}{2}\lambda^{p-2}$.

3. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_p &= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(J_\lambda)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(u_k I + v_k N + w_k N^2) = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} u_k\right) I + \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} v_k\right) N + \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} w_k\right) N^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\lambda^k\right) I + \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} k\lambda^{k-1}\right) N + \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\right) N^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\lambda^k\right) I + \left(\sum_{\mathbf{k=1}}^{p} \frac{k}{k!}\lambda^{k-1}\right) N + \frac{1}{2}\left(\sum_{\mathbf{k=2}}^{p} \frac{k(k-1)}{k!}\lambda^{k-2}\right) N^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\lambda^k\right) I + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k-1}\right) N + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{p} \frac{1}{(k-2)!}\lambda^{k-2}\right) N^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!}\right) I + \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda^k}{k!}\right) N + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p-2} \frac{\lambda^k}{k!}\right) N^2
\end{aligned}$$

   On obtient donc, pour tout $p \geq 2$, $S_p = x_p I + x_{p-1} N + \dfrac{1}{2} x_{p-2} N^2$, où la suite $(x_p)_p$ est définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par $x_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!}$.

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $S_p = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \frac{1}{2}x_{p-2} \\ 0 & x_p & x_{p-1} \\ 0 & 0 & x_p \end{pmatrix}$.

   Puisque la suite $(x_p)_p$ converge vers $e^\lambda$, on a $\lim\limits_{p \to +\infty} x_p = e^\lambda = \lim\limits_{p \to +\infty} x_{p-1} = \lim\limits_{p \to +\infty} x_{p-2}$, donc

$$S = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & \frac{1}{2}e^\lambda \\ 0 & e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & 0 & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Partie 2 - étude d'une application linéaire

5. Soit $f \in E$ et $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x + 2\pi)$. On note $\varphi : f \in E \longmapsto g$. Puisque $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, $g$ est aussi définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Ainsi, $\varphi$ est une application de $E$ dans $E$. Il reste à

montrer que $\varphi$ est linéaire. Soient $(f_1, f_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(\lambda f_1 + f_2)(x) = (\lambda f_1 + f_2)(x + 2\pi) = \lambda f_1(x + 2\pi) + f_2(x + 2\pi) = (\lambda\varphi(f_1) + \varphi(f_2))(x).$$

Ainsi $\varphi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda\varphi(f_1) + \varphi(f_2)$, donc $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

6. (a) Puisque $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f \in E_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists P \in \mathbb{C}_k[X], \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)e^{i\alpha x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)e^{i\alpha x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, f = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k. \end{aligned}$$

On obtient donc $E_n = \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.
Montrons que la famille $(f_k)_{0\le k\le n}$ est libre. Soit $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\mu_0 f_0 + \cdots + \mu_n f_n = [0]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n)e^{i\alpha x} = 0$. Comme $e^{i\alpha x} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient $\mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n = 0$. Ainsi, le polynôme $\mu_0 + \mu_1 X + \cdots + \mu_n X^n \in \mathbb{C}_n[X]$ possède une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Par conséquent, $\forall 0 \le k \le n$, on a $\mu_k = 0$, donc la famille $(f_k)_{0\le k\le n}$ est libre. C'est une famille libre et génératrice de $E_n$, donc c'est une base de $E_n$. (On en déduit au passage la dimension de $E_n$ : $\dim(E_n) = n + 1$.)

(b) On a $E_{n+1} = \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n, f_{n+1}) = \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n) + \mathrm{Vect}(f_{n+1}) = E_n + \{\lambda f_{n+1} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

7. (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\varphi(f_k)(x) = f_k(x+2\pi) = (x+2\pi)^k e^{i\alpha(x+2\pi)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(2\pi)^{k-p}x^p e^{2i\pi\alpha}e^{i\alpha x}$ donc $\varphi(f_k) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p}(2\pi)^{k-p}e^{2i\pi\alpha}f_p$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

(b) Soit $f \in E_n$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $f = a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n$. Par linéarité de $\varphi$, on obtient donc $\varphi(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi(f_k)$. Or d'après la question précédente, pour tout $0 \le k \le n$, $f_k$ appartient à $E_n$. Puisque $E_n$ est un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire, donc finalement $\varphi(f) \in E_n$. Ainsi, on a bien $\varphi(E_n) \subset E_n$.

8. Soit $m \in \mathcal{L}(E_n)$ défini par $m : f \in E_n \longmapsto \varphi(f)$. On remarque que $m$ n'est rien d'autre que la restriction de $\varphi$ à $E_n$. D'après la question 7.$a$, on a $\varphi(f_0) = e^{2i\pi\alpha}f_0$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(f_k) = e^{2i\pi\alpha}f_k + 2k\pi e^{2i\pi\alpha}f_{k-1} + h_k$ où $h_k \in \mathrm{Vect}((f_p)_{0\le p\le k-1})$. La matrice de $m$ dans la base $\mathcal{F}$ est donc la matrice d'ordre $n + 1$ suivante :

$$M = e^{2i\pi\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 2\pi & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & 1 & 4\pi & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 6\pi & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \star \\ \vdots & & & 0 & 1 & 2n\pi \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. On a $\det(m^p) = (\det m)^p$. Or $\det m = \det M = e^{2i\pi(n+1)\alpha}$ comme produit des termes diagonaux d'une matrice triangulaire supérieure d'ordre $(n + 1)$. Ainsi, $\det(m^p) = e^{2i\pi(n+1)p\alpha}$.

# Partie 3 - changement de base

10. On note $l = m - (e^{2i\pi\alpha})\,\mathrm{Id}$.

(a) On a vu que $m(f_0) = e^{2i\pi\alpha} f_0$, donc $(m - e^{2i\pi\alpha}\,\mathrm{Id})(f_0) = [0]$, ainsi on a bien $l(f_0) = [0]$.

(b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a vu que $m(f_{k+1}) = e^{2i\pi\alpha} f_{k+1} + 2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha} f_k + h_{k-1}$ avec $h_{k-1} \in \mathrm{Vect}((f_p)_{0\leq p<k})$. Par suite, $l(f_{k+1}) = 2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha} f_k + h_{k-1}$. Ainsi, $l(f_{k+1}) \in E_k$ et sa composante selon $f_k$ est $2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}$.

(c) On a démontré que $E_{k+1} = \mathrm{Vect}(f_{k+1}) + E_k$. Comme $l(f_{k+1})) \in E_k$ et $l(E_k) \subset E_k$ (puisque $l$ est un endomorphisme de $E_k$), par linéarité de $l$, on en déduit que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $l(E_{k+1}) \subset E_k$. Démontrons par récurrence (finie) sur $k$ que $l^{k+1}(E_k) = \{[0]\}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $H(k)$ la proposition "$l^{k+1}(E_k) = \{[0]\}$".

• On a $E_0 = \mathrm{Vect}(f_0)$ et $l(f_0) = [0]$ d'où $l(E_0) = \{[0]\}$. La proposition $H(0)$ est donc vraie.

• Supposons $H(k)$ vraie pour un entier $k$ fixé dans $[\![0, n-1]\!]$. Alors $(l^{k+2}(E_{k+1}) = l^{k+1}(l(E_{k+1})) \subset l^{k+1}(E_k) = \{[0]\}$. La propriété $H(k+1)$ est donc vraie, d'où le résultat voulu d'après le principe de récurrence.

(d) On procède encore une fois par récurrence. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $P(k)$ la proposition "$l^k(f_k) = k!(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha} f_0$".

• On a $l^0(f_0) = f_0$ et $0!(2\pi)^0 e^0 f_0 = f_0$ donc $P(0)$ est vraie.

• Supposons $P(k)$ vraie pour une entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. Avec les notations précédentes, on a $l(f_{k+1}) = (2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}) f_k + h_{k-1}$ d'où par linéarité de $l^k$,

$$\begin{aligned} l^{k+1}(f_{k+1}) &= (2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}) l^k(f_k) + l^k(h_{k-1}) = (2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha})(k!(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}) f_0 + [0] \\ &= (k+1)!(2\pi)^{k+1} e^{2i(k+1)\pi\alpha} f_0. \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie. Ainsi d'après le principe de récurrence, $P(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

(e) On calcule $l^n(f_n)(0) = n!(2\pi)^n e^{2in\pi\alpha} \neq 0$ donc $l^n(f_n)$ n'est pas l'application nulle. De plus, toujours par linéarité de $l$, $l^{n+1}(f_n) = (n!(2\pi)^n e^{2in\pi\alpha}) l(f_0) = [0]$.

11. Notons $\mathcal{B} = (l^n(f_n), \dots, l(f_n), f_n)$. Comme $\dim(E_n) = n+1$ et que la famille $\mathcal{B}$ possède $n+1$ éléments de $E_n$, il suffit de démontrer que la famille est libre pour prouver que c'est une base de $E_n$. Soit $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\mu_0 f_n + \mu_1 l(f_n) + \cdots + \mu_n l^n(f_n) = [0]$ $(\star)$. On applique $l^n$ à $(\star)$, et on obtient $\mu_0 l^n(f_n) = [0]$. Puisque $l^n(f_n) \neq [0]$, on en conclut donc $\mu_0 = 0$. On réitère l'opération et on montre par récurrence immédiate que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mu_k = 0$. Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre, donc c'est une base de $E_n$.

12. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $l(l^k(f_n)) = l^{k+1}(f_n)$ et $l(l^n(f_n)) = [0]$, donc la matrice de $l$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Par construction, $m = l + e^{2i\pi\alpha}\,\mathrm{Id}$ donc la matrice de $m$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $M'$, est

$$M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(l) + e^{2i\pi\alpha} I_n = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\alpha} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\alpha} & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & e^{2i\pi\alpha} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & e^{2i\pi\alpha} \end{pmatrix}.$$

14. $\mathbb{J}_{n+1}$ est l'ensemble des matrices de la forme $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda$ de module 1. La matrice $M'$ trouvée précédemment appartient à $\mathbb{J}_{n+1}$. Ainsi, l'application $u : \alpha \in \mathbb{R} \longmapsto M'$ est bien à valeurs dans $\mathbb{J}_{n+1}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1. Notons $\operatorname{Arg}(\lambda)$ un argument de $\lambda$ et posons $\alpha_\lambda = \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{Arg}(\lambda)$. Alors $\lambda = e^{2i\pi\alpha_\lambda}$ donc $J_\lambda = u(\alpha_\lambda)$, ce qui montre la surjectivité voulue.