Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Dans tout ce problème, on notera sh la fonction sinus hyperbolique, ch la fonction cosinus hyperbolique et th la fonction tangente hyperbolique.

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f.
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (b) Déterminer la limite de f en 0.
3. Justifer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$f'(x) = \left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$
4. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{th}(X) < X$.
5. En déduire le tableau de variations de f.
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \frac{\operatorname{sh}(X)}{X}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$
où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.
8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

B. Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles
$$xy' + y = \operatorname{ch}(x) \qquad (E).$$

9. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).
10. Donner sans justifications les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
11. Justifier que la fonction F (définie dans la question 8) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

C. Étude d'une suite

12. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \dfrac{n+1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.

    On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

14. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

15. En utilisant la question 7, déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

D. Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$.

17. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

18. En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$; on exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction ln.

19. *On* **admet** *les résultats suivants :*

    – $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} J(x) = +\infty$,

    – $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} J(x) = +\infty$ *et J admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation* $y = \dfrac{x}{2}$,

    – *la courbe représentative de J est toujours "au-dessus" de l'asymptote précédente.*

    Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.

20. Tracer l'allure de la courbe représentative de J.

    On donne pour le tracé : $\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0,76$ *et* $J\left(\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ *à* 10^{-2} *près.*

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie CCP

A. Étude d'une fonction

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(-x) = -x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ par imparité de sh. Ainsi, f est une fonction paire.

2. (a) On sait que $\operatorname{sh}(x) \sim_0 x$. Comme $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \to \pm\infty$, on en déduit que $f(x) \sim_{\pm\infty} x\frac{1}{x} = 1$ donc $f(x) \longrightarrow 1$ lorsque $x \to \pm\infty$.

   (b) On cherche à étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0. Comme f est paire, il suffit d'étudier la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$. Posons $u = \frac{1}{x}$. Quand $x \to 0^+$, on a $u \to +\infty$. On écrit

$$f(x) = x\frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{2} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   par croissance comparée. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

3. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sh est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composée et produit de fonctions dérivables, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Soit $X > 0$. Puisque la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis entre les points 0 et X. Ainsi, il existe $c \in]0; X[$ tel que $\operatorname{th}(X) - \operatorname{th}(0) = \operatorname{th}'(c)(X - 0)$ c'est-à-dire $\operatorname{th}(X) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}X$. Or pour tout $y > 0$, on a $\operatorname{ch}(y) > 1$, donc $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(c)} < 1$, d'où $\operatorname{th}(X) < X$.

5. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

6. On sait que $\operatorname{sh} X = X + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} + o_0(X^5)$, donc

$$\frac{\operatorname{sh} X}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o_0(X^4).$$

7. On traite seulement le cas $x \to +\infty$ puisque la fonction f est paire. Posons $X = \frac{1}{x}$, alors $X \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on peut donc utiliser le DL de la question précédente et écrire

$$f(x) = x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\operatorname{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o_{X\to 0}(X^4) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

   On obtient donc le résultat voulu avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$ et $a_4 = \frac{1}{120}$.

8. • La fonction $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Étudions la limite de cette fonction en 0. On a vu que $\frac{\operatorname{sh}(x)}{x} \sim_0 \frac{x}{x} = 1$ donc elle tend vers 1 lorsque $x \to 0$. On peut donc la prolonger sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F en posant $F(0) = 1$.

• De même, F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a pour tout $x \neq 0$

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{\operatorname{sh}(x)/x-1}{x} = \frac{\operatorname{sh}(x)-x}{x^2} = \frac{x+\frac{x^3}{3!}+o_0(x^3)-x}{x^2} \sim_{x\to 0} \frac{x}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc F est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut 0.

B. Une équation différentielle

9. Sur $]0;+\infty[$, (E) est équivalente à l'équation différentielle $(E') : y' + \frac{1}{x}y = \frac{\operatorname{ch} x}{x}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, normalisée.

   • La solution générale de l'équation homogène associée : $(E'_0)\ y' + \frac{1}{x}y = 0$ est $y : x \longmapsto \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   • On cherche ensuite une solution particulière de (E').

   Première méthode : avec la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière sous la forme $y : x \longmapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable sur $]0;+\infty[$. Alors on a pour tout $x > 0$, $y'(x) = \frac{\lambda'(x)x-\lambda(x)}{x^2}$ ce qui donne en remplaçant dans (E') : $\frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{x}$ et donc $\lambda'(x) = \operatorname{ch}(x)$ sur $]0;+\infty[$. On peut donc prendre $\lambda : x \longmapsto \operatorname{sh}(x)$. Ainsi, la fonction $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ est solution particulière de (E').

   Deuxième méthode : on remarque qu'à la question 11 il va falloir démontrer que F est solution de (E). On peut donc chercher directement à démontrer que $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ est solution de (E) sur $]0;+\infty[$ ce qui revient à un simple calcul de dérivée.

   • En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ est $\left\{y : x \in]0;+\infty[\longmapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\operatorname{sh} x}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

10. Sur $]-\infty;0[$, la seule chose qui va changer est la primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ que l'on va prendre égale à $\ln|x| = \ln(-x)$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty;0[$ est

$$\left\{y : x \in]-\infty;0[\longmapsto \frac{\lambda}{-x} + \frac{\operatorname{sh} x}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y : x \in]-\infty;0[\longmapsto \frac{\mu}{x} + \frac{\operatorname{sh} x}{x} \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

11. On va raisonner par analyse-synthèse.

   • *Analyse :* Soit y une solution dérivable sur $\mathbb{R}$ de (E), alors y est en particulier solution de (E) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$y : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{x} + \frac{\operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\mu}{x} + \frac{\operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   De plus, y est définie en 0 et en remplaçant dans (E), on voit que $y(0)$ doit être égal à $\operatorname{ch}(0) = 1$. Or on sait que $\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ tend vers 1 quand $x \to 0$, et $\frac{\lambda}{x}$ (resp. $\frac{\mu}{x}$) admet une limite finie quand $x \to 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ (resp. $\mu = 0$). Ainsi, y admet une limite finie en 0 si et seulement si $\lambda = \mu = 0$. Dans ce cas, on trouve que $y = F$ (comme définie ci-dessus).

   • *Synthèse :* on a déjà vu que F est solution de (E) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Comme de plus $F(0) = 1 = \operatorname{ch}(0)$, on a aussi F solution de (E) en 0 et donc sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat demandé.

C. Étude d'une suite

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$. Puisque $\dfrac{n+1}{n} > 1$, il existe donc un unique $u_n \in]0;+\infty[$ tel que $f(u_n) = \dfrac{n+1}{n}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f(u_n) = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} > 1 + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} = f(u_{n+1})$, ce qui implique que $u_n < u_{n+1}$ par stricte décroissance de f sur $]0;+\infty[$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est croissante.

14. La suite $(u_n)_n$ est croissante donc soit elle est majorée et elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Supposons *par l'absurde* que $(u_n)_n$ est majorée, alors il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq M$. La décroissance de f sur $]0;+\infty[$ entraîne $f(u_n) = \dfrac{n+1}{n} \geq f(M)$ avec $f(M) \in]1;+\infty[$ d'après l'étude de f. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve $f(M) \leq 1$ ce qui est contradictoire. Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

15. Comme u_n tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, d'après la question 7, on peut écrire

$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n}$$

d'où $\dfrac{1}{6u_n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{u_n^2}\right) = \dfrac{1}{u_n}$. On en déduit $\dfrac{1}{6u_n^2} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ d'où $u_n^2 \sim_{+\infty} \dfrac{n}{6}$ et enfin $u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{6}}$.

D. Une fonction définie par une intégrale

16. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}(2x).$$

17. Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x}{2}$ et $x \longmapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et f est continue sur $]0;+\infty[$, donc d'après le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale, J est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} J'(x) &= 1 \times f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x/2}\right)\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{4}\,\mathrm{sh}\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \end{aligned}$$

18. Commençons par chercher les zéros de la fonction J' sur $]0;+\infty[$. On sait que $x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \neq 0$ pour tout $x > 0$. On cherche donc les réels > 0 tels que $1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. On écrit

$$1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \iff e^{1/x} + e^{-1/x} = 4 \iff e^{2/x} - 4e^{1/x} + 1 = 0.$$

Posons $X = e^{1/x}$, alors x est un zéro de J' si et seulement si X est solution de $X^2 - 4X - 1 = 0$. Le discriminant du polynôme $X^2 - 4X + 1$ vaut 12 donc il admet deux racines réelles $x_1 = 2 \pm \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Or $X = e^{1/x}$ ne peut pas être égal à $2 - \sqrt{3}$ car alors $\dfrac{1}{x} = \ln(2 - \sqrt{3}) < 0$. Ainsi, x est un zéro de J' si et seulement si $X = e^{1/x} = 2 + \sqrt{3}$ ce qui équivaut à $x = \dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$.

Puisque J' est continue sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues, qu'elle s'annule en $\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$, que $\lim\limits_{x\to 0} J'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J'(x) = \dfrac{1}{2} > 0$, on en déduit que J' est négative (stricte) sur $]0; 1/\ln(2+\sqrt{3})[$ et positive (stricte) sur $]1/\ln(2+\sqrt{3});+\infty[$.

On vient de montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$, J' s'annule en un seul point, à savoir $x_0 = \dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$. De plus, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} J'(x) = -\infty$, donc par continuité de J' sur $]0;+\infty[$, on en déduit que J' est négative sur $]0;x_0[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} J'(x) = \dfrac{1}{2}$, donc J est positive sur $]x_0;+\infty[$.

19. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$x_0 \approx 0,76$		$+\infty$
$J'(x)$		$-$	0	$+$	
$J(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$J(x_0) \approx 0,65$	$\nearrow$	$+\infty$

20. En attendant un plus joli graphique, voici un aperçu du graphe de la fonction J :