Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = xe^{-5(n+1)x}.$$

1. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la fonction somme de cette série de fonctions. Calculer explicitement $S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$ mais converge normalement sur $[a; b]$ pour tous réels a et b vérifiant $0 < a < b$.

3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S(x)$. Que peut-on en déduire sur la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$?

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puis calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Déduire des questions précédentes la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{5x}-1}\,\mathrm{d}x$. On donne la valeur $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)} f_n$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application qui à tout $(f,g) \in E \times E$ associe

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{dt}.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire dans un espace préhilbertien.
3. Montrer que, pour tout $f \in E$, on a l'inégalité

   $$|f(1) - f(0)| \leq \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\mathrm{dt}}.$$

   Discuter le cas d'égalité.
4. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies, pour tout $t \in [0,1]$, par

   $$f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t, \quad \text{et} \quad f_3(t) = t^2.$$

   Donner une base orthonormée de F pour le produit scalaire φ.
5. Soit $g \in E$ la fonction définie, pour tout $t \in [0,1]$, par $g(t) = \arctan(t)$. Déterminer la projection orthogonale de g sur F.
6. Montrer qu'une fonction $f \in E$ est orthogonale à F si et seulement si

   $$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t)\mathrm{dt} = 0.$$

Correction de la partie analyse du Devoir Surveillé 1 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la série numérique $\sum f_n(x)$ converge : la suite de ses sommes partielles est constante égale à 0 donc elle converge vers 0. Si $x > 0$, alors on peut écrire $f_n(x) = xe^{-5x}\left(e^{-5x}\right)^n$. Comme la série géométrique $\sum \left(e^{-5x}\right)^n$ converge car sa raison e^{-5x} vérifie $\left|e^{-5x}\right| < 1$, il en est de même de la série numérique $\sum f_n(x)$. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Tout d'abord, on a vu que $S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant ce que l'on a fait ci-dessus, on a

$$S(x) = \lim_{N\to+\infty} xe^{-5x} \sum_{n=0}^{N} \left(e^{-5x}\right)^n = \lim_{N\to+\infty} xe^{-5x} \frac{1-e^{-5(N+1)x}}{1-e^{-5x}} = xe^{-5x}\frac{1}{1-e^{-5x}} = \frac{x}{e^{5x}-1}.$$

   On pouvait aussi traiter les questions a et b en même temps. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on calcule explicitement la somme partielle de rang N de la série numérique $f_n(x)$ puis on étudie sa limite lorsque $N \to +\infty$. Si la limite existe et est finie, alors la série converge et sa somme vaut la limite trouvée.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f_n est à valeurs positives, $|f_n| = f_n$. On peut alors chercher à dériver f_n pour calculer explicitement $\|f_n\|_{\infty;]0;+\infty[}$ ou alors procéder par majoration/minoration.

   - Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{n+1}$, alors $x_n \in]0;+\infty[$, donc sous réserve de l'existence de la borne supérieure, on a

$$\|f_n\|_{\infty;]0;+\infty[} = \sup_{x\in]0;+\infty[} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)| = \frac{e^{-5}}{n+1}$$

     Puisque $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et que la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{n+1}$ diverge, et par conséquent, la série $\sum \|f_n\|_{\infty;]0;+\infty[}$ diverge aussi. Cela démontre que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0;+\infty[$.

   - Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de la fonction $t \longmapsto t$ et décroissance de la fonction $t \longmapsto e^{-5(n+1)t}$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient, pour tout $x \in [a;b]$,

$$|f_n(x)| = xe^{-5(n+1)x} \leq be^{-5(n+1)a}.$$

     Par suite, la fonction f_n est bornée sur $[a;b]$ et comme la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensemble, il vient aussi

$$\|f_n\|_{\infty;[a;b]} \leq be^{-5(n+1)a}.$$

     Les explications données à la question 1 montrent que la série $\sum e^{-5(n+1)a}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum \|f_n\|_{\infty;[a;b]}$ converge, ce qui démontre la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[a;b]$.

3. Pour $x > 0$, on a $S(x) = \dfrac{x}{e^{5x}-1} = \dfrac{x}{5x+o(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{5} \neq 0 = S(0)$. Ainsi, la fonction somme S n'est pas continue en 0. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, si la série de fonctions $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $\mathbb{R}^+$, S serait aussi continue sur $\mathbb{R}^+$, ce qui est absurde. Ainsi, $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

4. (a) La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on remarque que $x^2 f_n(x) = x^3 e^{-5(n+1)x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées (car $n+1>0$). On en déduit que $f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par intégration par parties généralisée avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto -e^{5(n+1)x}/(5(n+1))$ (possible car l'intégrale que l'on calcule converge et la fonction uv admet des limites finies en 0 et $+\infty$), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{xe^{-5(n+1)x}}{5(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-5(n+1)x}}{5(n+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \left[-\frac{e^{-5(n+1)x}}{25(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} \quad \text{par croissances comparées} \\ &= \frac{1}{25(n+1)^2}.\end{aligned}$$

(b) On remarque que l'intégrale demandée correspond à l'intégrale sur $]0;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}^+$ selon le domaine sur lequel on souhaite appliquer le théorème d'intégration terme à terme) de la fonction S.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $]0;+\infty[$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0;+\infty[$, et sa fonction somme $S : x \in]0;+\infty[\longmapsto \frac{x}{e^{5x}-1}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0;+\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n| = f_n$ car f_n est à valeurs positives. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{25(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{25}\frac{1}{n^2}.$$

  Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction somme S est donc intégrable sur $]0;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{5x}-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{25(n+1)^2} = \frac{1}{25}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{150}.$$

5. On pourrait commencer par étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum g_n$. Cependant, si l'on avait déterminé explicitement les variations de f_n à la question 2, on verrait que la fonction $|f_n|$ atteint sa borne supérieure sur $\mathbb{R}^+$ (puis sur $[0;1]$) en $1/5(n+1)$ ce qui entraîne que $\|g_n\|_{\infty;[0;1]} = \frac{1}{\ln(n+2)}\|f_n\|_{\infty;[0;1]} = \frac{e^{-1}}{5(n+1)\ln(n+2)}$ qui est le terme général d'une série divergente. Il ne peut donc pas y avoir convergence normale.

Soit $x \in [0;1]$, alors $(-1)^n g_n(x) = \frac{xe^{-5(n+1)x}}{\ln(n+2)} \geq 0$, donc la série $\sum g_n(x)$ est une série alternée. De plus,

$$|g_n(x)| = \frac{xe^{-5(n+1)x}}{\ln(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } \ln(n+2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } xe^{-5(n+1)x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissance de ln et décroissance de $t \longmapsto e^{-5t}$, on a

$$|g_{n+1}(x)| = \frac{xe^{-5(n+2)x}}{\ln(n+3)} \leq \frac{xe^{-5(n+1)x}}{\ln(n+2)} = |g_n(x)|$$

donc la suite $(|g_n(x)|)_n$ est décroissante. Le critère des séries alternées entraîne donc la convergence de la série $\sum g_n(x)$. Cela montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $[0;1]$. De plus, pour $x \in [0;1]$, si l'on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)$, le critère des séries alternées implique aussi :

$$|R_n(x)| \leq |g_{n+1}(x)| = \frac{xe^{-5(n+2)x}}{\ln(n+3)} \leq \frac{1 \times e^{-5(n+2)\times 0}}{\ln(n+3)} = \frac{1}{\ln(n+3)}.$$

Cela démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction R_n est bornée sur $[0;1]$ et

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty;[0;1]} \leq \frac{1}{\ln(n+3)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par encadrement, on en déduit que $\|R_n\|_{\infty;[0;1]} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc que la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction nulle. Ainsi, la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.