Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre d'automne 2020-2021

Math III - Cursus préparatoire 2A | Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Partie ANALYSE

Exercice 1. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(7-5\cos^{13}(x)\right)\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction $f_a :]0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]0;1[, \quad f_a(t) = \frac{t^a - 1}{\sqrt{t} - 1}.$$

1. Soit $t \in]0;1[$. Étudier le signe de $f_a(t)$ en fonction de celui de a.
2. (a) Déterminer, en fonction des valeurs de a, un équivalent simple de $f_a(t)$ lorsque $t \to 0$.

   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que la fonction f_a est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$.

Exercice 3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{x+2}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

Partie ALGÈBRE

Exercice 4. Dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on considère le sous-espace $E = \mathrm{Vect}(c_0, c_1, s_0, s_1)$ où

$$c_0 : x \longmapsto \cos(x), \quad c_1 : x \longmapsto x\cos(x), \quad s_0 : x \longmapsto \sin(x) \quad \text{et} \quad s_1 : x \longmapsto x\sin(x).$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{c_0, c_1, s_0, s_1\}$ est libre, puis déterminer la dimension de E.
2. Montrer que l'application D, définie par $D(f) = f'$ pour tout $f \in E$, est un endomorphisme de E.
3. Écrire la matrice de D dans la base $\mathcal{F}$ de E, que l'on notera A.
4. L'application D est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer explicitement l'inverse de A.
6. À l'aide des questions précédentes, déterminer une primitive de la fonction $g : x \longmapsto x(\cos(x) + \sin(x))$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E.

Correction du Devoir Surveillé 3 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Une primitive de la fonction continue sin sur $[1;+\infty[$ est $x \longmapsto -\cos(x)$, qui n'admet pas de limite en $+\infty$. Par définition, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.
2. Notons $f : x \longmapsto e^{-x}\left(7-5\cos^{13}(x)\right)$. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur tout segment de la forme $[0;a]$ avec $a>0$. De plus, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1;1]$, le terme $7-5\cos^{13}(x)$ est toujours positif, comme e^{-x}, donc la fonction f est à valeurs positives. On peut remarquer que
$$0 \leq \frac{f(x)}{1/x^2} \leq 12x^2e^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées}$$
ce qui entraîne que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Par la règle de Riemann, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[a;+\infty[$ pour $a>0$, donc par comparaison de fonctions positives, il en est de même de f. Ainsi, f est intégrable sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Correction de l'exercice 2

1. On peut écrire $t^a = e^{a\ln(t)}$. Puisque $t \in]0;1[$, $\ln(t) < 0$, donc $a\ln(t)$ est du signe opposé à celui de a. Par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{a\ln t} < e^0 = 1$ si $a>0$ et $e^{a\ln t} > e^0 = 1$ si $a<0$. Par ailleurs, la stricte croissance de la fonction racine implique que $\sqrt{t} < \sqrt{1} = 1$ donc $\sqrt{t}-1<0$. On obtient finalement que $f_a(t)>0$ lorsque $a>0$ et $f_a(t)<0$ lorsque $a<0$.
2. (a) Lorsque $t \to 0$, on a $\sqrt{t}-1 \longrightarrow -1$ d'où $\sqrt{t}-1 \sim -1$. Si $a>0$, alors $t^a-1 \underset{t\to0}{\longrightarrow} -1$, donc par quotient d'équivalents, on en déduit que $f_a(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{-1}{-1} = 1$. Si $a<0$, alors $t^a \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ d'où $\dfrac{t^a-1}{t^a} = 1-t^{-a} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 1$. Par conséquent, $f_a(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t^a}{-1} = -t^a$.

   (b) La fonction f_a est continue (donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0;1/2]$) et de signe constant sur $]0;1/2]$. Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la fonction f_a est intégrable sur $]0;1/2]$. On va chercher à utiliser l'équivalent précédent. Si $a>0$, on a vu que $f_a(t) \underset{t\to0}{\sim} 1$, ce qui implique que f_a est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0;1/2]$. Si $a<0$, on a vu que $|f_a(t)| = -f_a(t) \underset{t\to0}{\sim} t^a = \dfrac{1}{t^{-a}}$ avec $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{-a}}$ intégrable sur $]0;1/2]$ si, et seulement si, $-a<1$, i.e. $a>-1$. Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $a \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
3. Par le changement de variable $u=t-1$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, et on a $\displaystyle\int_{1/2}^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^0 f_a(1+u)\,\mathrm{d}u$. De plus,
$$\begin{aligned} f_a(1+u) &= \frac{(1+u)^a-1}{(1+u)^{1/2}-1} \\ &= \frac{1+au+o(u)-1}{1+u/2+o(u)-1} \quad \text{quand } u\to 0 \\ &= \frac{a+o(1)}{1/2+o(1)} \underset{u\to0}{\longrightarrow} 2a \end{aligned}$$
Par suite, f_a est prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[1/2;1[$.

Correction de l'exercice 3 Notons $f : x \longmapsto \dfrac{e^{3ix}}{x+2}$. La fonction f est continue sur $[\pi;+\infty[$, à valeurs complexes.

- Pour tout $x \geq \pi$, $|f(x)| = \dfrac{1}{x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Par comparaison de fonctions positives et par la règle de Riemann, la fonction f n'est donc pas intégrable sur $[\pi;+\infty[$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas absolument convergente.
- Notons $F : X \longmapsto \displaystyle\int_\pi^X f(x)\,\mathrm{d}x$ l'unique primitive de f sur $[\pi;+\infty[$ qui s'annule en π. Montrons que F admet une limite finie en $+\infty$. Soit $X > \pi$. Par une intégration par partie avec les fonctions u, v suivantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi;+\infty[$:

$$\begin{array}{ccc} u' : x \longmapsto e^{3ix} & \Leftarrow & u : x \longmapsto \dfrac{1}{3i}e^{3ix} \\ v : x \longmapsto \dfrac{1}{x+2} & \Rightarrow & v' : x \longmapsto -\dfrac{1}{(x+2)^2} \end{array}$$

on trouve

$$\begin{aligned} F(X) &= \left[\frac{e^{3ix}}{3i(x+2)}\right]_\pi^X + \int_\pi^X \frac{e^{3ix}}{3i(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{3iX}}{3i(X+2)} + \frac{1}{3i(\pi+2)} + \int_\pi^X \frac{e^{3ix}}{3i(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

De plus, $\left|\dfrac{e^{3iX}}{3i(X+2)}\right| = \dfrac{1}{3(X+2)} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $x \geq \pi$, $\left|\dfrac{e^{3ix}}{3i(x+2)^2}\right| = \dfrac{1}{3(x+2)^2} \leq \dfrac{1}{3x^2}$ avec $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ intégrable sur $[\pi;+\infty[$. Par comparaison, la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{3ix}}{3i(x+2)^2}$ est donc intégrable sur $[\pi;+\infty[$, donc il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\int_\pi^X \frac{e^{3ix}}{3i(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \ell = \int_\pi^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{3i(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$. On en déduit que

$$F(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3i(\pi+2)} + \ell \in \mathbb{C}$$

ce qui démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Par suite, cette intégrale est semi-convergente.

Correction de l'exercice 4

1. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 c_0 + \lambda_1 c_1 + \mu_0 s_0 + \mu_1 s_1 = \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne le 0 de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, c-à-d la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \cos(x) + \lambda_1 x\cos(x) + \mu_0 \sin(x) + \mu_1 x \sin(x) = 0 \qquad (*)$$

En évaluant $(*)$ en 0, il vient $\lambda_0 = 0$. En remplaçant dans $(*)$ et en évaluant en $\pi/2$ et en $-\pi/2$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_0 + \dfrac{\pi}{2}\mu_1 = 0 \\ -\mu_0 + \dfrac{\pi}{2}\mu_1 = 0 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \pi\mu_1 = 0 \\ -\mu_0 + \dfrac{\pi}{2}\mu_1 = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \mu_1 = 0 = \mu_0$$

En remplaçant dans $(*)$ et en évaluant en π, on obtient finalement $\lambda_1 = 0$, ce qui démontre que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E par définition de E, et libre, c'est donc une base de E. Par suite, la dimension de E est égale au cardinal de $\mathcal{F}$, à savoir $\dim E = 4$.

2. Par opération sur la dérivation de fonctions, on a : $\forall f, g \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda D(f) + D(g)$, ce qui démontre la linéarité de D. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$c_0'(x) = -\sin(x), \quad c_1'(x) = \cos(x) - x\sin(x), \quad s_0'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad s_1'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$$

d'où $D(c_0) = -s_0$, $D(c_1) = c_0 - s_1$, $D(s_0) = c_0$ et $D(s_1) = s_0 + c_1$. Ceci implique que les images par D des éléments de $\mathcal{F}$ sont encore des éléments de E. Puisque, pour tout $f \in E$, il existe $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ tels que $f = \alpha_0 c_0 + \alpha_1 c_1 + \beta_0 s_0 + \beta_1 s_1$, il vient alors

$$D(f) = \alpha_0 D(c_0) + \alpha_1 D(c_1) + \beta_0 D(s_0) + \beta_1 D(s_1)$$

qui appartient encore à E par stabilité par combinaisons linéaires. L'application linéaire $D : E \longrightarrow E$ est donc un endomorphisme de E.

3. Par les calculs ci-dessus, puisque la j-ième colonne de A correspond au vecteur colonne des coordonnées de l'image par D du j-ième vecteur de $\mathcal{F}$, on a directement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. En échangeant les colonnes C_1 et C_3, puis les colonnes C_2 et C_4, on obtient une matrice échelonnée de même rang que A, d'où $\mathrm{rang}(A) = 4$. Par suite, l'endomorphisme D est surjectif ($\mathrm{Im}(f) = E$). Puisque D est un endomorphisme de E qui est de dimension finie, cela équivaut à l'injectivité de D (ainsi qu'à sa bijectivité).

5. On détermine l'inverse de A par la méthode du pivot de Gauss :

$$(A|I_4) \underset{\substack{C_1 \leftrightarrow C_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\ C_4 \leftarrow -C_4 + C_1 \\ C_3 \leftarrow -C_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = (I_4|A^{-1})$$

L'inverse de A est donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Soit $f \in E$. La fonction f est une primitive de g si, et seulement si, $D(f) = g = c_1 + s_1$, ce qui équivaut à $f = D^{-1}(c_1 + s_1)$. Notons (a_0, a_1, b_0, b_1) les coordonnées de f dans la base $\mathcal{F}$. L'égalité $f = D^{-1}(g)$ se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la fonction $f = c_0 - c_1 + s_0 + s_1 : x \longmapsto (1-x)\cos(x) + (1+x)\sin(x)$ est une primitive de g.

Correction de l'exercice 5

1. Tout d'abord, on a l'inclusion $f(\mathrm{Im}(g)) \subset f(E) = \mathrm{Im}(f)$. Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, or $f = f \circ g \circ f$, d'où $y = f(g(f(x)) = f(z)$ avec $z = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$. Ainsi, on a montré que $y \in f(\mathrm{Im}(g))$ ce qui démontre l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset f(\mathrm{Im}(g))$ et achève de démontrer l'égalité.

2. Puisque E n'est pas supposé de dimension finie, on ne peut pas raisonner à l'aide des dimensions. On va démontrer que, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(g)$ tel que $x = y + z$.

- Analyse : supposons qu'il existe $(y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(g)$ tel que $x = y + z$. Alors, $f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$ et il existe $t \in E$ tel que $z = g(t)$. On peut alors appliquer g à la première égalité ce qui donne $g(f(x)) = g(f(g(t))) = g \circ f \circ g(t) = g(t) = z$ et $y = x - z = x - g(f(x))$. Sous réserve d'existence du couple (y, z), ceci prouve son unicité.
- Synthèse : posons $z = g(f(x))$ et $y = x - g(f(x))$, alors par construction, g appartient à l'image de g, et $f(y) = f(x) - f(g(f(x))) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0_E$ ce qui démontre que $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Puisque par construction, $x = y + z$, on vient donc de démontrer l'existence d'un couple $(y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(g)$ tel que $x = y + z$.

Par conséquent, on a bien démontré que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E$.