**Université Claude Bernard - Lyon 1** | Semestre d'automne 2018-2019

Math III - Cursus préparatoire 2A | Durée : 1 heure et 30 minutes

---

**Partie commune - Devoir numéro 1**

---

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ;* ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
*Les six exercices sont indépendants et le barème est approximatif.*

Partie ANALYSE

**Exercice 1.** ($\simeq 3$ points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $f : x \longmapsto (\mathrm{sh}(x))^2 - (\sin(x))^2$.
2. Étudier la limite de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{(\sin(x))^2} - \dfrac{1}{(\mathrm{sh}(x))^2}$ en 0.

**Exercice 2.** ($\simeq 6$ points) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : ]0;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{\alpha x} + 3}{x + e^{2\alpha x}}$ pour $x \in ]0;+\infty[$.

1. Montrer que la fonction $f$ est intégrable sur $]0;1]$.
2. Déterminer, selon le signe du réel $\alpha$, un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ pour que la fonction $f$ soit intégrable sur $[1;+\infty[$.

**Exercice 3.** ($\simeq 4,5$ points) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.
*Pour la convergence de l'intégrale, on pourra écrire* $\dfrac{e^{i\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2}{i}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{ie^{i\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Partie ALGÈBRE

**Exercice 4.** ($\simeq 2,5$ points) Justifier l'inversibilité et calculer explicitement l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.** ($\simeq 5,5$ points)On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. On considère l'endomorphisme $f$ de $E$ défini par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P.$$

1. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $E$. Écrire la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ (on donnera le détail des calculs permettant de l'obtenir).
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un plan vectoriel dont on déterminera une base.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $E$ ?

**Exercice 6.** ($\simeq 5$ points)Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 4. Soient $H_1, H_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, distincts et de dimension 3.

1. Justifier l'existence de $a \in H_2 \backslash H_1$.
2. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $H_1$. Montrer que la famille $(e_1, e_2, e_3, a)$ est libre.
3. En déduire que $E = H_1 + H_2$.
4. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

# Correction du Devoir Surveillé 1 - partie commune

## Correction de l'exercice 1

1. On utilise les développements usuels : lorsque $x \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (\mathrm{sh}(x))^2 - (\sin(x))^2 \\ &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\ &= \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

2. On peut chercher un équivalent, en mettant les deux fractions au même dénominateur : pour $x$ proche de 0 non nul,

$$g(x) = \frac{(\mathrm{sh}(x))^2 - (\sin(x))^2}{(\sin(x)\,\mathrm{sh}(x))^2} = \frac{f(x)}{(\sin(x)\,\mathrm{sh}(x))^2}.$$

Par la question précédente, on dispose de l'équivalent $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^4}{3}$. De plus, par les développements limités usuels, on sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Puisque l'on peut multiplier,diviser les équivalents, et les mettre à une puissance fixe, on obtient donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^4/3}{(x^2)^2} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, la fonction $f$ admet une limite lorsque $x \to 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}$.

## Correction de l'exercice 2

1. La fonction $f$ est continue sur $]0;+\infty[$. Lorsque $x \to 0$, on a

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x} + 3}{x + e^{2\alpha x}} \longrightarrow \frac{4}{1} = 4$$

ce qui montre que la fonction $f$ est prolongeable par continuité sur le segment $[0;1]$ (en posant $f(0) = 4$), elle est donc intégrable sur ce segment, donc sur $]0;1]$.

2. 
- Si $\alpha > 0$, alors $e^{\alpha x} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. On factorise par les termes dominants afin d'écrire

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x}(1 + 3e^{-\alpha x})}{e^{2\alpha x}(1 + xe^{-2\alpha x})} = e^{-\alpha x}\frac{1 + 3e^{-\alpha x}}{1 + xe^{-2\alpha x}}$$

d'où

$$\frac{f(x)}{e^{-\alpha x}} = \frac{1 + 3e^{-\alpha x}}{1 + xe^{-2\alpha x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

puisque $xe^{-2\alpha x} \to 0$ par croissances comparées. Ainsi, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-\alpha x}$.

- Si $\alpha = 0$, alors $f(x) = \frac{4}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4}{x}$.
- Si $\alpha < 0$, alors $e^{\alpha x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Par suite $e^{\alpha x} + 3 \underset{x\to+\infty}{\sim} 3$ et $x + e^{2\alpha x} = x(1 + e^{2\alpha x}/x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, ce qui implique que $f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{3}{x}$.

3. La fonction $f$ est continue et à valeurs positives sur $[1;+\infty[$, donc on peut chercher à utiliser les théorèmes de comparaison pour étudier son intégrabilité sur $[1;+\infty[$. On distingue les cas selon les valeurs de $\alpha$ :

- Si $\alpha > 0$, on a vu que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-\alpha x}$ donc $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, ce qui montre que $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ par Riemann, donc par comparaison, il en est de même de $f$.
- Si $\alpha \leq 0$, on a vu qu'il existe $C \in ]0; +\infty[$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{C}{x}$. Or la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$ par Riemann, et $C \neq 0$, donc par comparaison, $f$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, $f$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

**Correction de l'exercice 3** Posons $f : x \in [\pi; +\infty[ \longmapsto \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}$. On doit montrer deux choses pour la semi-convergence : la fonction $f$ n'est pas intégrable sur $[\pi; +\infty[$, et l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

- La fonction $f$ est continue sur $[\pi; +\infty[$, à valeurs complexes. De plus, pour tout $x \in [\pi; +\infty[$, $|f(x)| = \frac{1}{x}$ donc $|f|$ n'est pas intégrable sur $[\pi; +\infty[$ par Riemann, ce qui montre que $f$ n'est pas intégrable sur $[\pi; +\infty[$.
- Puisque $f$ est continue sur $[\pi; +\infty[$, montrer la convergence de l'intégrale $\int_\pi^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ revient à démontrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_\pi^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ (puisque $F$ est l'unique primitive de $f$ sur $[\pi; +\infty[$ s'annulant en $\pi$). Soit $x > \pi$, par intégration par parties avec les fonctions $u : t \longmapsto -2ie^{i\sqrt{t}}$ et $v : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi; x]$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_\pi^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\pi^x \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{e^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-2ie^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{ie^{i\sqrt{t}}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-2ie^{i\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{2ie^{i\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi}} - \int_\pi^x \frac{ie^{i\sqrt{t}}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $0 \leq \left|\frac{-2ie^{i\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus la fonction $t \longmapsto \frac{ie^{i\sqrt{t}}}{t^{3/2}}$ est continue sur $[\pi; +\infty[$ (donc intégrable sur tout segment de la forme $[\pi; A]$ avec $A > \pi$) et vérifie $\left|\frac{ie^{i\sqrt{t}}}{t^{3/2}}\right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. Elle est donc intégrable sur $[\pi; +\infty[$ par Riemann. Par conséquent, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\int_\pi^x \frac{ie^{i\sqrt{t}}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Par opérations sur les limites, on trouve donc $G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2ie^{i\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi}} - \ell \in \mathbb{C}$, ce qui démontre la convergence de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Correction de l'exercice 4** On peut justifier l'inversibilité à l'aide du rang de $A$ ou par un calcul de déterminant par exemple. En développant par rapport à la première ligne, on trouve

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

donc $A$ est inversible. Pour calculer $A^{-1}$, on peut utiliser la méthode du miroir/pivot de Gauss :

$$(A \mid I_3) \underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 - 3C_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{C_2 \leftarrow C_2 + 2C_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2 - 3C_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(I_3 \mid A^{-1}\right)$$

ce qui entraîne $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -1 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Correction de l'exercice 5**

1. On calcule $f(1) = 1$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = (X^2 - 1) - 2X^2 + X^2 = -1$ et $f(X^3) = 3(X^2 - 1)X - 3X^3 + X^3 = -3X + X^3$ ce qui entraîne

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. En effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on trouve $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ (puisque les 2 premières colonnes sont nulles et les 2 dernières échelonnées). Par le théorème du rang, on a donc $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \mathrm{rang}(f) = 2$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(f)$ est un plan vectoriel. Par ailleurs, on voit que $f(X) = 0$, et que $f(X^2 + 1) = -1 + 1 = 0$ donc $(X, X^2 + 1)$ est une famille de $\mathrm{Ker}(f)$. De plus, elle est libre (car les degrés des polynômes sont distincts), de cardinal $2 = \dim(f)$, donc c'est une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

   On aurait aussi pu résoudre directement un système à l'aide de la matrice $M$. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E$, on a :

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(P) = 0_E \iff M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a - c = 0 \\ -3d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \iff P = a(1 + X^2) + bX$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{a(X^2 + 1) + bX \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^2 + 1, X)$ et la famille $(X^2 + 1, X)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ puisqu'elle est génératrice et libre (car composée de deux polynômes non colinéaires puisque de degrés différents).

3. On sait que l'image d'une base de $E$ par $f$ donne une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(1, 0, -1, -3X + X^3) = \mathrm{Vect}(1, -3X + X^3)$$

   Ainsi, $(1, -3X + X^3)$ est une base de $\mathrm{Im}(f) = G$ car génératrice et de cardinal égal à la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, (ou libre au vu des degrés).

4. On sait par le théorème du rang que $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$. On peut montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ ou utiliser

$$\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X, X^2 + 1, 1, -3X + X^3) = \mathrm{Vect}(X, X^2, 1, X^3) = E$$

(puisque le sous-espace vectoriel engendré par une famille est inchangé si l'on additionne à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille). Ainsi, $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, donc les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

**Correction de l'exercice 6**

1. Si on avait $H_2 \subset H_1$, alors l'égalité des dimensions entraînerait $H_2 = H_1$, ce qui est contradictoire. Ainsi, $H_2 \not\subset H_1$ donc il existe $a \in H_2 \backslash H_1$.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 a = 0_E$. Si $\lambda_4 \neq 0$, alors on peut écrire $a = \frac{-1}{\lambda_4}(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = H_1$ ce qui est absurde. Ainsi, $\lambda_4 = 0$, puis la liberté de la famille $\mathcal{B}_1$ entraîne $\lambda_i = 0$ pour $i \in [\![0; 4]\!]$, ce qui démontre la liberté de la famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3, a)$.

3. Comme $H_1$ et $H_2$ sont deux sous-espaces de $E$, on a déjà $H_1 + H_2 \subset E$. Par la question précédente, $\mathcal{F}$ est une famille libre composée de 4 éléments dans $E$ de dimension 4, c'est donc une base de $E$. Ainsi,

$$E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, a) = \underbrace{\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)}_{=H_1} + \underbrace{\mathrm{Vect}(a)}_{\subset H_2} \subset H_1 + H_2$$

ce qui démontre bien que $E = H_1 + H_2$.

4. Par la formule de Grassmann, $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = 3 + 3 - 4 = 2$.