
Partie CCP - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!}e^{-n}$ et $w_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $w_n = -1 + \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
2. Montrer la convergence absolue de la série $\sum w_n$.
3. En déduire la convergence de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note a sa limite.
5. Démontrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a}n^n\sqrt{n}e^{-n}$.

On pourrait démontrer à l'aide des intégrales de Wallis que la constante a vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ce qui nous donne la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

6. Application : donner un équivalent simple du coefficient binomial $\dbinom{2n}{n}$ lorsque $n \to +\infty$. Que peut-on dire de la série $\sum \dbinom{2n}{n}$?

Problème

I - Étude d'une suite de fonctions

Soit $\varphi : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n\varphi(x)$ pour tout $x \in [0;1]$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on explicitera.
2. On suppose que $\varphi(1) \neq 0$. Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0;1]$.
3. On suppose que $\varphi(1) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\alpha \in]0;1[$ tel que $|\varphi(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [1-\alpha;1]$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [1-\alpha;1]$.
   (c) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0, que l'on explicitera, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1-\alpha]$, on a $|f_n(x)| \leq a_n$.
   (d) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

II - Étude d'une série de fonctions par ses sommes partielles

Soit $\psi : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g_n(x) = x^n \psi(x)$ pour tout $x \in [0;1]$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} g_n$.

4. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, expliciter la valeur de $S_N(x)$ pour tout $x \in [0;1]$.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ψ pour que la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$.

On suppose désormais que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ et l'on note S sa limite simple. On va chercher une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

6. Expliciter la fonction S.
7. On suppose dans cette question uniquement que la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
   (a) Justifier la continuité de S.
   (b) En déduire que ψ est dérivable en 1 et donner $\psi'(1)$.
8. On suppose réciproquement que ψ est dérivable en 1 avec $\psi'(1) = 0$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $S_N(x) = S(x) - x^{N+1}S(x)$.
   (b) À l'aide de la partie I, étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$.
9. Application : Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (x^n - 2x^{n+1} + x^{n+2}) \sin(3x)\, \mathrm{d}x$.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie CCP

Correction de l'exercice :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}e^{-n-1}}{\frac{n^n\sqrt{n}}{n!}e^{-n}}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}}e^{-1}\right) \\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{-1}\right) \\ &= -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

2. On peut effectuer un développement limité puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ afin de trouver

$$\begin{aligned} w_n &= -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{12n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \geq 0. \end{aligned}$$

   Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car d'exposant $2 > 1$), par comparaison de série à termes positifs (au moins partir d'un certain rang), la série $\sum |w_n|$ converge, ce qui montre la convergence absolue de $\sum w_n$.

3. On va exploiter le caractère téléscopique de la série $\sum w_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ ce qui entraîne :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{p} w_n = \sum_{n=1}^{p} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(u_{p+1}) - \ln(u_1).$$

   Par conséquent,

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2, \quad \ln(u_p) = \sum_{n=1}^{p-1} w_n + \ln(u_1) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} w_n + \ln(u_1) < +\infty$$

   ce qui prouve la convergence de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Notons ℓ la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell}$$

   par continuité de la fonction exponentielle, ce qui démontre la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. Notons donc $a = \lim_{n\to+\infty} u_n$. D'après les questions précédentes, par unicité de la limite, on a $a = e^{\ell}$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ ce qui entraîne $a > 0$ (en particulier $a \neq 0$). On peut alors écrire

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a \quad \text{d'où} \quad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n\sqrt{n}}{a}e^{-n}.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Par croissance comparée, $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$, donc la série numérique $\sum \binom{2n}{n}$ diverge grossièrement.

Problème

I - Étude d'une suite de fonctions

1. Soit $x \in [0;1]$ fixé.
   - Si $x \in [0;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   - Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \varphi(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \varphi(1)$.

   Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0;1[\\ \varphi(1) & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$
2. Supposons par l'absurde que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$. Comme φ est continue sur $[0;1]$, les fonctions f_n sont continues sur $[0;1]$ comme produit de fonctions continues. Le théorème de continuité des suites de fonctions montre que la limite f est continue sur $[0;1]$, ce qui est absurde puisque $\varphi(1) \neq 0$. Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0;1]$.
3. (a) Comme φ est continue en 1, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0;1]$ tel que $|x-1| \leq \alpha$, on a :
   $$|\varphi(x) - \varphi(1)| = |\varphi(x)| \leq \varepsilon.$$
   Quitte à poser $\alpha' = \min\left(\alpha, \dfrac{1}{2}\right)$, on peut supposer que $0 < \alpha < 1$. Comme l'assertion “$x \in [0;1]$ avec $|x-1| \leq \alpha$” est alors équivalente à “$x \in [1-\alpha;1]$”, on a prouvé le résultat voulu.

   (b) Pour tout $x \in [1-\alpha;1]$, puisque $|x| \leq 1$, on trouve $|f_n(x)| = |x^n\varphi(x)| \leq \varepsilon$.

   (c) La fonction φ est continue sur le segment $[0;1]$, donc elle est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|\varphi(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0;1]$. Pour tout $x \in [0;1-\alpha]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$|f_n(x)| \quad \leq \quad M(1-\alpha)^n$$
   avec la suite $(M(1-\alpha)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 puisque $0 < 1-\alpha < 1$.

   (d) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in [0;1]$:
   $$|f_n(x)| \quad \leq \quad \max\left(M(1-\alpha)^n, \varepsilon\right)$$
   Or la suite $(M(1-\alpha)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|M\,(1-\alpha)^n| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a pour tout $x \in [0;1]$:
   $$|f_n(x)| \quad \leq \quad \varepsilon$$
   Donc, pour tout $n \geq n_0$, la fonction $f_n - f = f_n$ est bornée et comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on a
   $$\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| \quad \leq \quad \varepsilon$$
   Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

II - Étude d'une série de fonctions par ses sommes partielles

4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} g_n(x) = \psi(x) \sum_{n=0}^{N} x^n = \begin{cases} \psi(x)\dfrac{1-x^{N+1}}{1-x} & \text{si } x \in [0;1[\\ (N+1)\psi(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

puisque l'on somme une suite géométrique de raison x.

5. Soit $x \in [0;1]$ fixé.
   - Si $x \in [0;1[$, alors $x^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $S_N(x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\psi(x)}{1-x}$.
   - Si $x = 1$, $S_n(x) = (N+1)\psi(1)$, donc la suite numérique $(S_N(1))_{N\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\psi(1) = 0$, auquel cas la limite vaut 0.

   Ainsi, la suite de fonctions $(S_N)_N$ converge simplement sur $[0;1]$ si et seulement si $\psi(1) = 0$.

6. La limite $S : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi(x)}{1-x} & \text{si } x \in [0;1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

7. On suppose que la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.
   (a) Puisque la convergence uniforme implique la convergence simple, la fonction S est la limite uniforme de $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$. Comme la fonction ψ est continue sur $[0;1]$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction S_N est continue sur $[0;1]$ comme somme et produits de fonctions continues. Puisque $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S sur $[0;1]$, le théorème de continuité des suites de fonctions implique la continuité de S sur $[0;1]$.
   (b) Par conséquent, la limite lorsque x tend vers 1 de S existe et vaut $S(1) = 0$, ce qui montre que le taux d'accroissement suivant vérifie :

$$\forall x \in [0;1[, \quad \frac{\psi(x) - \psi(1)}{x-1} = \frac{\psi(x)}{x-1} = -S(x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} -S(1) = 0 < +\infty$$

   Ainsi ψ est dérivable en 1 et $\psi'(1) = 0$.

8. On suppose réciproquement que ψ est dérivable en 1 de dérivée $\psi'(1) = 0$.
   (a) L'égalité demandée est triviale pour $x = 1$ puisque $S_N(1) = 0 = S(1) - 1^{N+1}S(1)$. Soit $x \in [0;1[$, alors d'après le calcul précédent

$$S_N(x) = \psi(x)\frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{\psi(x)}{1-x} - x^{N+1}\frac{\psi(x)}{1-x} = S(x) - x^{N+1}S(x).$$

   (b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0;1]$, la question précédente permet d'écrire

$$S_N(x) - S(x) = -x^{N+1}S(x) = x^N(-xS(x)).$$

   Posons $\varphi : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0;1]$ par $\varphi(x) = -xS(x)$, et montrons que φ vérifie les conditions de la partie I.
   - La fonction S est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1[$. De plus, comme ψ est dérivable en 1 de dérivée $\psi'(1) = 0$, on a

$$\varphi(x) = -xS(x) = x\frac{\psi(x) - \psi(1)}{x-1} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} \psi'(1) = 0 = \varphi(1)$$

     ce qui démontre la continuité de φ en 1 et donc sur $[0;1]$.

- $\varphi(1) = 0$,

donc d'après la première question, la suite de fonctions $(S_N - S)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ (vers la fonction nulle), ce qui est équivalent à la convergence uniforme de la suite de fonctions $(S_N)_N$ vers S sur $[0;1]$.

9. On pose pour tout $x \in [0;1]$, $\psi(x) = (1-x)^2\sin(3x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \in [0;1] \longmapsto x^n\psi(x)$. La fonction ψ est continue sur $[0;1]$ comme produit de fonctions continues. De plus, $\psi(1) = 0$ et ψ est dérivable en 1, de dérivée $\psi'(1) = 0$. D'après les questions précédentes, la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} g_n(x)$$

converge uniformément sur $[0;1]$. D'après le théorème d'intégration des suites de fonctions, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\psi(x)}{1-x}.$$

Or pour tout $N \in \mathbb{N}$, puisque la somme ci-dessous est finie, on peut écrire

$$\int_0^1 S_N(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} x^n(1-x)^2\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N}\int_0^1 (x^n - 2x^{n+1} + x^{n+2})\sin(3x)\,\mathrm{d}x.$$

L'existence de la limite lorsque $N \to +\infty$ justifie l'existence de la somme infinie étudiée et celle-ci vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (x^n - 2x^{n+1} + x^{n+2}\sin(3x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1-x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{3}(1-x)\cos(3x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\cos(3x)\,\mathrm{d}x \text{ par intégration par parties} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sin(3).
\end{aligned}$$