Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Étudier la limite de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Pour tous $P, Q \in E$, on pose

$$B(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et } q(P) = \int_0^1 tP(t)P'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de $B(P,Q)$ pour tous $P, Q \in E$ et montrer que B est une forme bilinéaire sur E.
2. B est-elle symétrique ? antisymétrique ?
3. Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle définie ?
4. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_c = (1, X, \ldots, X^n)$ de E. (On donnera toutes les justifications nécessaires pour la trouver.)
5. Dans la suite, on suppose que $n = 2$.
   (a) À l'aide de la question précédente, expliciter $q(P)$ pour tout $P = x + yX + zX^2 \in E$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}_2[X]$ orthogonale pour q.
   (c) Quel relation existe-t-il entre les matrices de q dans $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}_1$?
   (d) En déduire la signature de q. La forme q est-elle positive ? négative ?

Exercice 3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1. Déterminer l'intervalle maximal I de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ et préciser la limite simple sur I.
2. En posant une suite $(x_n)_n$ bien choisie, montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1;0]$.
3. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.
4. On considère la suite de fonctions $(g_n)_n$ définies sur $[0;1]$ par $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $|\sin(\pi x)| \leq \pi\,|x-1|$.
   (b) En déduire que $(g_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;1]$.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Puisque $u_0 \geq 0$ et que l'exponentielle est à valeurs positives, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 0$, ce qui démontre que tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont positifs. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Étudier la limite de la suite $(nu_n)_n$ équivaut à étudier la limite de la suite $((n+1)u_{n+1})_n$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1} = e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

d'après la question précédente et par continuité de l'exponentielle en 0. Ainsi, la suite $(nu_n)_n$ converge vers 1.

3. Puisque $(nu_n)_n$ converge vers 1, on obtient directement l'équivalent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Comme la série harmonique $\sum u_n$ diverge, par comparaisons de séries à termes positifs, on en conclut que $\sum u_n$ diverge.

4. Attention, on a l'équivalent $(-1)^n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$, mais le terme général n'étant pas de signe constant, on ne peut pas utiliser les théorèmes de comparaison. On effectue donc un développement limité du terme général u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - u_{n-1} + \underset{n\to+\infty}{o}(u_{n-1})\right) \qquad \text{car } u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &= \frac{1}{n} - \frac{u_{n-1}}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{u_{n-1}}{n}\right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}u_{n-1}}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{u_{n-1}}{n}\right).$$

Notons pour tout $n \geq 1$, $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = \frac{(-1)^{n+1}u_{n-1}}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{u_{n-1}}{n}\right)$.

- La série $\sum a_n$ est une série alternée, car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n a_n = \frac{1}{n} \geq 0$. De plus la suite $(|a_n|)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0. Ainsi, $\sum a_n$ converge d'après le critère des séries alternées.
- On remarque que

$$|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

  Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$), par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum b_n$ converge absolument, donc en particulier $\sum b_n$ converge.

Le terme $(-1)^n u_n$ est la somme des termes généraux de deux séries convergentes, donc la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Correction de l'exercice 2

1. Soient $P, Q \in E$, la fonction polynômiale $t \longmapsto tP(t)Q'(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$, donc elle est intégrable sur $[0;1]$, ce qui justifie l'existence de $B(P,Q)$.

La fonction $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$B(\lambda P_1 + P_2, Q) = \int_0^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q'(t)\,\mathrm{d}t = \lambda B(P_1, Q) + B(P_2, Q)$$

par linéarité de l'intégrale. Ainsi, B est linéaire par rapport à sa première variable. De même, en utilisant en plus la linéarité de la dérivation, on montre que pour tous $P, Q_1, Q_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $B(P, \lambda Q_1 + Q_2) = \lambda B(P, Q_1) + B(P, Q_2)$ ce qui démontre la bilinéarité de B. Ainsi, B est une forme bilinéaire sur E.

2. On remarque que $B(X, 1) = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0 \neq B(1, X) = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, ce qui démontre que B n'est pas symétrique. De plus, on a aussi $B(X, 1) \neq -B(1, X)$ ce qui entraîne que B n'est pas non plus antisymétrique.

3. On a pour tout $P \in E$, $q(P) = \int_0^1 tP(t)P'(t)\,\mathrm{d}t = B(P, P)$ avec B une forme bilinéaire sur E, donc q est une forme quadratique sur E.

   De plus, par définition, q est définie si et seulement si pour tout $P \in E$, $(q(P) = 0 \iff P = 0_E)$. Or $q(1) = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$ alors que $1 \neq 0$, donc la forme q n'est pas définie.

4. Par définition, la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_c$ est la matrice de sa forme polaire φ_q dans $\mathcal{B}_c$. La forme bilinéaire B n'est pas symétrique donc $B \neq \varphi_q$. Celle-ci est donnée par la formule de polarisation :

$$\varphi_q : (P, Q) \in E \times E \longmapsto \frac{1}{4}\left(q(P+Q) - q(P-Q)\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 t(P(t)Q'(t) + Q(t)P'(t))\,\mathrm{d}t$$

   après calculs.

   On aurait aussi pu considérer directement l'application symétrisée de B

$$\varphi : (P, Q) \in E \times E \longmapsto \frac{1}{2}\left(B(P, Q) + B(Q, P)\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 t(P(t)Q'(t) + Q(t)P'(t))\,\mathrm{d}t$$

   qui est bilinéaire symétrique et vérifie $\forall P \in E$, $\varphi(P, P) = q(P)$ et utiliser l'unicité de la forme polaire de q.

   La matrice de q dans la base $\mathcal{B}_c$ est la matrice carrée de taille $n + 1 = \dim(E)$ (forcément symétrique) dont le coefficient (i, j) (pour $i, j \in [\![1; n+1]\!]$) est donné par

$$\varphi_q(X^{i-1}, X^{j-1})$$

   puisque le k-ème élément de la base $\mathcal{B}_c$ vaut X^{k-1}. On calcule donc ce terme :

$$\begin{aligned}
\varphi_q(X^{i-1}, X^{j-1}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 t(t^{i-1}(j-1)t^{j-2} + t^{j-1}(i-1)t^{i-2})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (i+j-2)t^{i+j-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{(i+j-2)}{2(i+j-1)}t^{i+j-1}\right]_0^1 \qquad \text{acr } i+j-1 \neq 0 \\
&= \frac{i+j-2}{2(i+j-1)}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_c$ est $M = \left(\frac{i+j-2}{2(i+j-1)}\right)_{1 \leq i,j \leq n+1}$.

5. On suppose désormais que $n = 2$.

   (a) La matrice de q dans la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, pour tout $P = x + yX + zX^2$, on obtient

$$q(P) = \frac{1}{2}xy + \frac{2}{3}xz + \frac{1}{3}y^2 + \frac{3}{4}yz + \frac{2}{5}z^2.$$

(b) On applique le procédé d'orthogonalisation de Gauss afin de réduire q sous forme de carrés : pour tout $P = x + yX + zX^2$, on a

$$\begin{aligned}
q(P) &= \frac{1}{3}\left(y^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{9}{4}yz\right) + \frac{2}{3}xz + \frac{2}{5}z^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(\left(y + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}z\right)^2 - \left(\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}z\right)^2\right) + \frac{2}{3}xz + \frac{2}{5}z^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(y + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}z\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{9}{16}x^2 + \frac{27}{16}xz + \frac{81}{64}z^2\right) + \frac{2}{3}xz + \frac{2}{5}z^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(y + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}z\right)^2 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{5}{48}xz - \frac{7}{320}z^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(y + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}z\right)^2 - \frac{3}{16}\left(x^2 - \frac{5}{9}xz\right) - \frac{7}{320}z^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(y + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}z\right)^2 - \frac{3}{16}\left(x - \frac{5}{18}z\right)^2 + \frac{3}{16}\frac{25}{18^2}z^2 - \frac{7}{320}z^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(y + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}z\right)^2 - \frac{3}{16}\left(x - \frac{5}{18}z\right)^2 - \frac{1}{135}z^2
\end{aligned}$$

On pose alors $A = y + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}z$, $B = x - \frac{5}{18}z$ et $C = z$, ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} y = A - \frac{3}{4}\left(B + \frac{5}{18}C\right) - \frac{9}{8}C \\ x = B + \frac{5}{18}C \\ z = C \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = B + \frac{5}{18}C \\ y = A - \frac{3}{4}B - \frac{4}{3}C \\ z = C \end{array}\right.$$

ce qui équivaut encore à

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{5}{18} \\ 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(avec Q inversible). Ainsi, Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}_2[X]$ à la base $\mathcal{B}_1$ dans laquelle les coordonnées de $P = x + yX + zY^2$ sont (A, B, C). On a de plus

$$\mathcal{B}_1 = \left(X, 1 - \frac{3}{4}X, \frac{5}{18} - \frac{4}{3}X + X^2\right)$$

et comme $q(P) = \frac{1}{3}A^2 - \frac{3}{16}B^2 - \frac{1}{135}C^2$, la matrice de q dans $\mathcal{B}_1$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{16} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{135} \end{pmatrix} := D$$

et la base $\mathcal{B}_1$ est une base q-orthogonale.

(c) D'après la formule de changement de base pour les formes bilinéaires, on a la relation $D = {}^tQDQ$.

(d) La matrice D de q dans $\mathcal{B}_1$ est diagonale, possède un coefficient diagonal > 0 et deux < 0, donc la signature de q est $(1, 2)$. Elle n'est donc ni positive, ni négative (puisque $q(X) = \frac{1}{3} > 0$ et $q\left(1 - \frac{3}{4}X\right) = -\frac{3}{16} < 0$).

Correction de l'exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   - Si $|x| > 1$, $|x|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, la suite numérique $(f_n(x))_n$ ne converge pas.
   - Si $|x| < 1$, alors $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite $(f_n(x))_n$ converge vers 0.
   - Si $x = -1$, $f_n(x) = 2(-1)^n$ n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$. Si $x = 1$, $f_n(x) = 0$ donc $(f_n(x))_n$ converge vers 0.

   Ainsi, l'intervalle maximal de convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ est $I =]-1;1]$, et sur I, $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, notée $\widetilde{0}$.

2. Puisque la convergence uniforme entraîne la convergence simple, si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $]-1;0]$, sa limite uniforme est la fonction nulle $\widetilde{0}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = -e^{-1/n}$. Alors $x_n \in]-1;0]$ et vérifie :

$$\left|f_n(x_n) - \widetilde{0}(x)\right| = |f_n(x_n)| = \left(e^{-1/n}\right)^n (1 + e^{-1/n}) = e^{-1}(1 + e^{-1/n})$$

   La fonction $f_n - \widetilde{0}$ est continue sur le segment $[-1;0]$ donc bornée. De plus,

$$\|f_n - \widetilde{0}\|_{\infty,]-1;0]} = \sup_{x\in]-1;0]} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)| = \left(e^{-1/n}\right)^n (1 - e^{-1/n}) = e^{-1}(1 + e^{-1/n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2e^{-1} \neq 0$$

   ce qui implique que $\|f_n - \widetilde{0}\|_{\infty,]-1;0]}$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1;0]$.
   On aurait aussi pu considérer la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $y_n = -1 + \dfrac{1}{n}$ et faire le même raisonnement.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $[0;1]$ et on a

$$\forall x \in [0;1], \quad f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$$

   donc f_n est positive sur $[0;1]$, croissante sur $[0;n/(n+1)]$ et décroissante sur $[n/(n+1);1]$. De plus $f_n - \widetilde{0} = f_n$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc bornée, et l'étude des variations ci-dessus entraîne

$$\begin{aligned}
\|f_n - \widetilde{0}\|_{\infty,[0;1]} &= \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| \\
&= f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n+1} \\
&= e^{-n\ln(1+1/n)} \frac{1}{n+1} \\
&= e^{-1+o_{n\to+\infty}(1)} \frac{1}{n+1} \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{1}{en}
\end{aligned}$$

   ce qui montre que $\|f_n - \widetilde{0}\|_{\infty,[0;1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $\widetilde{0}$ sur $[0;1]$.

4. (a) Considérons la fonction $\varphi : x \in [0;1] \longmapsto \sin(\pi x)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$ et de dérivée $\varphi' : x \in [0;1] \longmapsto \pi\cos(\pi x)$ bornée par π. Soit $x \in \mathbb{R}$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à φ pour obtenir :

$$|\varphi(x) - \varphi(1)| \leq \pi\,|x - 1|$$

   ce qui donne le résultat demandé.

(b) Pour tout $x \in [0;1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|g_n(x)| = |x|^n \, |\sin(\pi x)| \leq |x|^n \, \pi \, |x-1| = \pi \, |f_n(x)| \leq \pi \|f_n - \widetilde{0}\|_{\infty;[0;1]}.$$

Puisque ceci est valable pour tout $x \in [0;1]$, la fonction g_n est bornée sur $[0;1]$ et comme le sup est le plus petit des majorants, on trouve

$$0 \leq \|g_n - \widetilde{0}\|_{\infty,[0;1]} \leq \|g_n\|_{\infty,[0;1]} \leq \pi \|f_n - \widetilde{0}\|_{\infty,[0;1]} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;1]$. D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge elle-aussi vers la fonction nulle sur $[0;1]$.