Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automone 2023-2024
Cursus prépa 2A : Mathématiques 3 18 septembre 2023

Devoir surveillé 1

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1

1. De quelle fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ est-elle la dérivée ?
2. En déduire une primitive de la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$ pour $x \in]0, +\infty[$.
3. Montrer que f est intégrable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et calculer $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.
4. Montrer que f est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 2 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\cos t - 2 + \ln(1+t^2)}{t^a}\, dt$$

converge.

Exercice 3 Soient e_1, e_2, e_3 trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. On suppose que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. On pose $v_1 = 2e_2 - e_1$, $v_2 = -e_2 + e_3$, $v_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3$.

1. Soit F le sous-espace engendré par (e_1, e_2, e_3). Montrer que F est égal au sous-espace engendré par (v_1, v_2, v_3).
2. Soit G un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^4$. Quelle est la dimension de G ? Justifier votre réponse.
3. On suppose désormais que $e_1 = (1, -2, 3, -4)$, $e_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $e_3 = (0, 0, 0, 1)$. Expliciter un supplémentaire G de F.

Exercice 4 Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions réelles et dérivables. On note F le sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles engendré par la famille (f_1, f_2, f_3).

1. On suppose que $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ne s'annulent jamais lorsque $x > 10$ ou $x < -10$. On suppose aussi que $f_3 \sim -\frac{2}{3} f_2 = o(f_1)$ lorsque $x \to +\infty$ et que $f_3 \sim f_2$ lorsque $x \to -\infty$. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de F.
2. Soient g_1, g_2, g_3 les fonctions définies pour x réel par $g_1(x) = e^{-x}$, $g_2(x) = e^x$ et $g_3(x) = e^{2x}$. On suppose que $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, g_3)$ forme une base de F. Pour $f \in F$, on pose $\phi(f) = f'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de F.
3. Exprimer la matrice M représentant ϕ dans la base $\mathcal{B}'$.
4. On suppose que $g_1 = f_2 - f_3$, $g_2 = 2f_2 + 3f_3$, $g_3 = f_1 - f_2$. Exprimer la matrice A qui représente ϕ dans la base $\mathcal{B}$.