# Math II PMI - Partie commune Devoir n° 5
# 1 h30, 18 janvier 2012

*Aucun document autorisé, ni calculatrice. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Toute affirmation doit être légitimée.*

**Question de cours.** Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral, en n'oubliant pas de donner les conditions de validité de la formule.

**Exercice 1.**

1. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $(1+x)^4$ en 0.
2. Donner un développement limité à l'ordre 6 de $\sin^4 x$ en 0.
3. Donner un développement limité à l'ordre 6 de $f(x) = e^{\sin^4 x} - 1$ en 0.
4. Donner un développement limité à l'ordre 5 de $g(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \cos x - 1$ en 0
5. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $(g/f)(x)$ en 0.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. On suppose qu'il existe des constantes $C > 0$ et $D > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C \text{ et } |f''(x)| \leq D.$$

On veut démontrer qu'il existe une constante $K > 0$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq K$.

1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Donner le développement de Taylor-Lagrange de $f$ à l'ordre 1 entre $x_0$ et $x_0 + h$ (le reste étant donc d'ordre 2).
2. En déduire qu'il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ qu'on déterminera en fonction $C$ et $D$, telles que
$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall h > 0, |f'(x_0)| \leq Ah + B/h.$$
3. Quel est le minimum de l'application $\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ h \mapsto Ah + B/h$ ?
4. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq 2\max(C, D)$.

**Exercice 3.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ (on rappelle que $0! = 1$). Montrer que $P$ n'a que des racines simples.

**Exercice 4.** Pour tout $n \geq 1$, déterminer $R_n$ le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^n - 1$ par $(X-1)(X-2)$.

**Exercice 5.** Soit $B$ un polynôme réel de degré 3, et $\phi : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par $\forall P \in \mathbb{R}_5[X]$, $\phi(P) =$ le reste de la division euclidienne de $P$ par $B$.

1. Montrer que $\phi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_5[X]$.
2. Montrer que $\phi$ est une application linéaire.
3. Montrer que $\phi^2 = \phi$.
4. Quel est le noyau de $\phi$ ? Calculer sa dimension.
5. Quelle est l'image de $\phi$ ? Calculer sa dimension.