Exercice 2 :

1) a) On calcule d'abord $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$ parce que $D$ est inversible)

On trouve ensuite : $\phi_D(E_{11}) = D^{-1}(E_{11}D) = D^{-1}(aE_{11}) = E_{11}$ $\qquad \phi_D(E_{21}) = D^{-1}(E_{21}D) = D^{-1}(aE_{21}) = \frac{a}{b}E_{21}$

$\phi_D(E_{12}) = D^{-1}(E_{12}D) = D^{-1}(bE_{12}) = \frac{b}{a}E_{12}$ $\qquad \phi_D(E_{22}) = D^{-1}(E_{22}D) = D^{-1}(bE_{22}) = E_{22}$

on explicite alors la matrice de $\phi_D$ : c'est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Le polynôme caractéristique de $\phi_D$ est donc $(X-1)^2(X-\frac{b}{a})(X-\frac{a}{b})$

Son spectre est l'ensemble des racines de ce polynôme : c'est $\{1, a/b, b/a\}$

- Si $a = b$ le spectre est $\{1\}$ et $\phi_D = Id$. La multiplicité est 4 et c'est aussi $\dim E_1 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$
- Si $a = -b$ le spectre est $\{-1, 1\}$. Chaque multiplicité vaut 2 et aussi chaque dimension d'espace propre, puisque la matrice de $\phi_D$ est diagonale
- Sinon, $1 \neq \frac{a}{b}$, $1 \neq \frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$. La multiplicité de 1 est 2 ainsi que $\dim E_1$, les multiplicités de $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont 1 et tant $E_{a/b}$ que $E_{b/a}$ est une droite.

2) a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\phi_V \circ \phi_U(M) = \phi_V[\phi_U(M)] = \phi_V(U^{-1}MU) = V^{-1}(U^{-1}MU)V = (UV)^{-1}M(UV) = \phi_{UV}(M)$$

donc $\phi_V \circ \phi_U = \phi_{UV}$

b) Par le a), $\phi_{Q^{-1}PQ} = \phi_Q \circ \phi_P \circ \phi_{Q^{-1}}$. Posons $\psi = \phi_{Q^{-1}}$

On constate que $\left.\begin{array}{l} \phi_Q \circ \psi = \phi_Q \circ \phi_{Q^{-1}} = \phi_{Q^{-1}Q} = \phi_I = Id \\ \text{et } \psi \circ \phi_Q = \phi_{Q^{-1}} \circ \phi_Q = \phi_{QQ^{-1}} = \phi_I = Id \end{array}\right\}$ donc $\phi_Q = \psi^{-1}$

On a bien obtenu : $\phi_{Q^{-1}PQ} = \psi^{-1} \circ \phi_P \circ \psi$

c) Soit $Q$ telle que $P' = Q^{-1}PQ$. En notant $\psi = \phi_{Q^{-1}}$ on a ainsi :

$$\phi_{P'} = \psi^{-1} \circ \phi_P \circ \psi$$

On prend les matrices de ces trois endomorphismes dans $\mathcal{E}$ : on obtient la relation : $mat_{\mathcal{E}}(\phi_{P'}) = [mat_{\mathcal{E}}(\psi)]^{-1}[mat_{\mathcal{E}}(\phi_P)][mat_{\mathcal{E}}(\psi)]$

Les matrices de $\phi_P$ et $\phi_{P'}$ sont donc semblables

3) a) Puisque $P$ est diagonalisable de spectre $\{a,b\}$, elle est semblable à $D=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Par le 2)c), les matrices de $\Phi_P$ et $\Phi_D$ dans $\mathcal{E}$ sont semblables.

Or par le 1) la matrice de $\Phi_D$ dans $\mathcal{E}$ est diagonale, et son spectre est $\{1, a/b, b/a\}$.

La matrice de $\Phi_P$ dans $\mathcal{E}$ est donc semblable à la matrice diagonale écrite au 1) elle est donc diagonalisable, de même spectre. L'endomorphisme $\Phi_P$ est à son tour diagonalisable, de même spectre.

b) Le polynôme caractéristique de $P$ est $(X-a)(X-b) = X^2-(a+b)X+ab$
$= X^2 - sX + p$

c) Celui de $\Phi_P$ est aussi celui de la matrice écrite au 1)a) :

c'est donc $(X-1)^2\left(X-\frac{a}{b}\right)\left(X-\frac{b}{a}\right) = (X-1)^2\left(X^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)X+1\right)$

$= (X-1)^2\left(X^2-\frac{a^2+b^2}{p}+1\right) = (X-1)^2\left(X^2-\frac{s^2-2p}{p}X+1\right)$

4) a) Comme on travaille sur $\mathbb{C}$, le polynôme $P_P$ a au moins une racine : le spectre n'est pas vide.

S'il avait plus d'un élément, il en aurait deux et $P_P$ serait scindé à racines simples : $P$ serait diagonalisable.

Il n'a donc qu'un et un seul élément.

b) $P_P$ est scindé, puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$, donc $P$ est trigonalisable.

c) $T_\varepsilon$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a+\varepsilon \end{pmatrix}$. Son spectre est donc $\{a, a+\varepsilon\}$ qui a deux éléments. Elle est donc diagonalisable

d) $P_\varepsilon$ est semblable à la matrice diagonalisable $T_\varepsilon$, donc diagonalisable

e) Le spectre de $P_\varepsilon$ est $\{a, a+\varepsilon\}$ et on peut lui appliquer le 3) c) puisqu'elle est diagonalisable : le polynôme

$P_{\phi_{P_\varepsilon}}$ vaut donc $(X-1)^2\left(X^2 + \dfrac{2a(a+\varepsilon)-(2a+\varepsilon)^2}{a(a+\varepsilon)} + 1\right)$.

Faisons tendre $\varepsilon$ vers 0 ; les limites qui suivent sont calculées dans l'espace vectoriel des matrices $(2,2)$, qui est de dimension finie.

Quand $\varepsilon \to 0$, $T_\varepsilon \to T$ puis $P_\varepsilon \to P$ car la multiplication des matrices, qui s'exprime par des formules simples, est visiblement continue.

Le déterminant, somme de produits, est à son tour continu.

Donc $P_\varepsilon^{-1} = \dfrac{1}{\det P_\varepsilon}\, {}^t\mathrm{com}(P_\varepsilon) \longrightarrow \dfrac{1}{\det P}\, {}^t\mathrm{com}(P) = P^{-1}$

Ensuite pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $P_\varepsilon^{-1} E_{ij} P_\varepsilon \to P^{-1} E_{ij} P$

Dans l'espace de dimension finie des matrices $(4,4)$, la matrice dans $\mathcal{E}$ de $\phi_{P_\varepsilon}$ tend alors vers celle de $\phi_P$

Enfin le polynôme caractéristique, coefficient par coefficient, est donné par une formule simple. On obtient donc finalement ~~$\phi$~~ $P_{\phi_P}$ en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 dans $P_{\phi_{P_\varepsilon}}$ : c'est $(X-1)^4$

f) Si $\phi_P$ était diagonalisable, vu son spectre, on aurait $\phi_P = Id$ donc pour toute $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on aurait $P^{-1}MP = M$

ou encore $MP = PM$

Par un exercice bien connu, ceci entraîne que $P$ est multiple de $I$

Mais ceci contredit la non-diagonalisabilité de $P$.

~~[illegible]~~ $\phi_P$ est donc non diagonalisable.