Injectivité et surjectivité pour des applications quelconques:

Exercice 11 Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Démonstration. 1. (a) *Première méthode:* On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective (c'est à dire que $\forall x, x' \in E, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.
Soit $x, x' \in E$. Si $f(x) = f(x')$, alors, en appliquant la fonction g, on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$, c'est à dire $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme $g \circ f$ est injective, $x = x'$.
D'où f est injective.

Deuxième méthode: Soit $x, x' \in E$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \\ &\Rightarrow x = x' \text{ car } g \circ f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

D'où f est injective.

(b) On suppose de plus que f est surjective. Soit $y, y' \in F$. On suppose que $g(y) = g(y')$. Comme f est surjective, il existe $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a alors

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(y) \\ &= g(y') \\ &= g(f(x')) \\ &= g \circ f(x'). \end{aligned}$$

Comme $g \circ f$ est injective, on obtient $x = x'$.

2. (a) *Première méthode:* Montrons que g est surjective (c'est-à-dire que $\forall z \in G, \exists y \in F, g(y) = z$).
Soit $z \in G$. La fonction $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$, on pose alors $y = f(x)$, ce qui montre le résultat attendu.

Deuxième méthode: On a:

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ est surjective } &\Rightarrow \forall z \in G, \exists x \in E,\ g \circ f(x) = z \\ &\Rightarrow \forall z \in G, \exists x \in E,\ g(f(x)) = z \\ &\Rightarrow \forall z \in G, \exists y \in F,\ g(y) = z \\ &\Rightarrow g \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

(b) On suppose de plus que g est injective. Montrons que f est surjective.
Soit $y \in F$, on note $z = g(y) \in G$. La fonction $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. On a alors $g(y) = g(f(x))$ et donc, par injectivité de g, $y = f(x)$. D'où la surjectivité de f.

□

Exercice 13 Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que, pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
2. En déduire que si f est surjective alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Montrer que, pour tout $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que si f est injective alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Démonstration. 1. Cette question est presque tautologique, car il suffit de réécrire les définitions de $y \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$.
Soit $B \subset F$.
Première méthode: par double inclusion.

($\subset$) On commence par montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(E)$.
Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Montrons que $y \in B \cap f(E)$. $y \in f(f^{-1}(B))$ veut dire (par définition) qu'il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. $x \in f^{-1}(B)$ veut dire (par définition) que $f(x) \in B$, et de plus $f(x) \in f(E)$. D'où $y = f(x) \in B \cap f(E)$

($\supset$) Montrons maintenant l'inclusion réciproque.
Soit $y \in B \cap f(E)$. Puisque $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $f(x) = y \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$, puis $y \in f(f^{-1}(B))$.

On a donc bien $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$. *Deuxième méthode:* Directement en passant aux éléments.
Soit $y \in F$. On a alors:

$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(B)) &\Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(B), y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E, f(x) \in B, f(x) = y \\ &\Leftrightarrow y \in B \text{ et } y \in f(E) \\ &\Leftrightarrow y \in B \cap f(E). \end{aligned}$$

D'où $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

2. Si f est surjective, alors $f(E) = F$, ainsi on a $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) = B \cap F = B$.
3. Soit $A \subset E$. Soit $x \in A$. Par définition de *l'ensemble* $f^{-1}(\cdot)$, il suffit de montrer que $f(x) \in f(A)$, ce qui est immédiat! D'où $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. On suppose maintenant que f est injective, on cherche à montrer l'inclusion réciproque dans la question précédente.
Soit $A \subset E$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on obtient $x = x' \in A$. D'où $x \in A$. On a ainsi montré $A \subset f^{-1}(f(A))$.

□

Exercice supplémentaire 1 Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$. Montrer que

$$\text{f injective ssi } \forall A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Une petite remarque: la contraposée de:

$$\text{f injective} \Rightarrow \forall A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

est

$$\exists A, B \subset E, f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) \ \Rightarrow\ f \text{ n'est pas injective.}$$

Démonstration. On montre le résultat par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose f injective. Montrons que $\forall A, B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. D'après l'exercice 7 de la fiche 2, il suffit de montrer que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $A, B \subset E$, et soit $y \in f(A) \cap f(B)$. $y \in f(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. De même $y \in f(B)$ donc il existe $x' \in B$ tel que $f(x') = y$. D'où $f(x) = f(x')$, et comme f est injective, $x = x' \in A \cap B$. Puis $y = f(x) \in f(A \cap B)$.
On a montré que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

($\Leftarrow$) On suppose que $\forall A, B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Montrons que f est injective.
Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On pose $y = f(x)$, $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. D'après l'hypothèse, on a alors

$$\{y\} = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\} \cap \{x'\}).$$

Si $x \neq x'$, alors $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$ ce qui est impossible vu que $f(\{x\} \cap \{x'\}) = \{y\} \neq \emptyset$. D'où $x = x'$. Ainsi f est injective.

□

Injectivité et surjectivité pour des applications sur des ensembles:

Exercice supplémentaire 2 Soit E, F deux ensembles finis, et $f : E \to F$ une application de E dans F. Montrer que:

1. f surjective implique $card(E) \geq card(F)$;
2. f injective implique $card(E) \leq card(F)$.

Démonstration. C'est une application directe du principe des tiroirs:

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_des_tiroirs`

Le principe des tiroirs nous dit que $card(f(E)) \leq card(E)$. On a de plus égalité ssi f est injective.

1. Supposons f injective. On a $f(E) \subset F$, donc $card(f(E)) \leq card(F)$. Or f est injective, donc $card(E) = card(f(E))$. D'où $card(E) \leq card(F)$.
2. Supposons f surjective, c'est à dire $f(E) = F$. Par le principe des tiroirs, on a $card(E) \geq card(f(E))$. D'où $card(E) \geq card(F)$.

□

Exercice 10 Soit E, F deux ensembles finis de même cardinal, et $f : E \to F$ une application de E dans F. Montrer que f est bijective ssi f est surjective ssi f est injective.

Démonstration. Il nous suffit de montrer que f est injective ssi f est surjective.

— ($\Rightarrow$) On suppose f injective. On a alors $card(f(E)) = card(E) = card(F)$. Or $f(E) \subset F$ donc $f(E) = F$, c'est à dire f est surjective (si $A \subset F$, alors $A = F$ ssi $card(A) = card(F)$).

— ($\Leftarrow$) On suppose f surjective. On a alors $card(f(E)) = card(F) = card(E)$, ce qui montre que f est injective.

□