Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Math II - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.***

Exercice 1. Construire aussi précisément que possible la courbe paramétrique définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$x(t) = \sin(t) + \cos(t), \quad y(t) = \sin^3(t).$$

Déterminer également les points d'intersection de cette courbe avec l'axe vertical Oy ainsi que la pente de la tangente à la courbe en ces points.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z, y = t\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
2. On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Donner une base de F ainsi que sa dimension.
3. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (1,2,1,1)$, $u_2 = (0,3,0,5)$, $u_3 = (1,0,1,0)$ et $u_4 = (0,1,0,-1)$.
   (a) Déterminer une base de G ainsi que sa dimension.
   (b) Donner une base de $F \cap G$.
   (c) Montrer que $F + G = G$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles (de variable t) suivantes :

1) $y'' - 5y' + 6y = te^t$,

2) $y'' + y = \sin(\omega t)$, avec un paramètre $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. Discuter la solution en fonction du paramètre ω.

Exercice 4. On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soient $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. On note $\mathcal{F}$ la famille $(f_1, f_2, f_1 \circ f_1, f_1 \circ f_2)$ d'éléments de E.
   (a) Donner une expression explicite des éléments de $\mathcal{F}$.
   (b) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
2. Soient $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et G son complémentaire dans E, c'est-à-dire $G = \{g \in E \mid g(0) \neq 0\}$.
   (a) Les ensembles F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
   (b) Soit $g \in G$ fixé. Montrer que pour tout $h \in E$, il existe $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $h = f + \alpha g$.
   (c) En déduire que $E = F \oplus \mathbb{R}g$ où $\mathbb{R}g = \{\lambda g \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.