1) Il est bien clair que les fonctions m_0 et m_1 ne sont pas proportionnelles l'une à l'autre. Montrons que m_2 n'en est pas combinaison linéaire. Si elle l'était, il y aurait deux constantes α et β telles que $m_2 = \alpha m_0 + \beta m_1$, donc que pour tout t de $[-1, 1]$ on ait l'identité : $t^2 = m_0 + m_1 t$. En dérivant celle-ci deux fois, on obtient $2 = 0$ ce qui n'est pas raisonnable. La famille proposée est donc libre.

2) a) Un peu comme dans la solution choisie pour la question précédente, mais en plus simple, il suffit de dériver l'hypothèse pour obtenir la conclusion.

b) On va montrer par récurrence sur $n \geq 0$ l'énoncé suivant :

(H_n) "$(m_0, \ldots, m_n)$ est libre ".

* Pour $n = 0$ c'est immédiat : m_0 n'est pas la fonction nulle, donc (m_0) est libre.

* Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Supposons l'hypothèse (H_{n-1}) vraie.

Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\lambda_0 m_0 + \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n = 0.$$

On applique le a) et on utilise la liberté de $(m_0, \ldots, m_{n-1})$. Cette technique assure la nullité de tous les λ_i où i varie entre 1 et n. En reportant cette information dans la relation ci-dessus, on a alors $\lambda_0 m_0 = 0$ et la nullité de λ_0 arrive aussi. La famille $(m_0, \ldots, m_n)$ ets donc libre. Ceci prouve l'hypothèse (H_n).

* On a ainsi montré par récurrence que (H_n) est réalisée pour tout $n \geq 0$.

3) Soit $n \geq 0$, supposons que e soit combinaison linéaire de $(m_0, \ldots, m_n)$ soit, en notant α_i les coefficients qui écrivent cette combinaison :

$$e = \alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_{n-1} m_{n-1} + \alpha_n m_n.$$

En dérivant cette équation, on obtient une autre expression de e, à savoir :

$$e = \alpha_1 m_0 + 2\alpha_2 m_1 + \cdots + n\alpha_n m_{n-1} + 0 m_n.$$

La famille $(m_0, \ldots, m_n)$ étant libre, les coefficients dans ces deux expressions sont les mêmes, d'où découle en cascade la nullité de tous les coefficients qui y apparaissent. Mais cela signifie que l'exponentielle est la fonction nulle, ce qui est notoirement faux. C'est donc qu'elle n'était pas combinaison linéaire de $(m_0, \ldots, m_n)$.

4) Soit $n \geq 0$ et soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_n p_n = 0.$$

Soit t un réel entre -1 et 1 donc dans le domaine de définition de l'arccosinus. En appliquant l'identité qui précède à $\operatorname{Arccos} t$ et en remarquant que $\cos(\operatorname{Arccos} t) = t$, on obtient :

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_n t^n = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout t de $[-1, 1]$ cette information se synthétise en :

$$\lambda_0 m_0 + \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n = 0.$$

Vu la liberté de la famille $(m_0, \ldots, m_n)$, on conclut que tous les λ_i sont nuls.

5) On trouve, après calculs faciles de trigonométrie :

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

qu'on regroupe ensuite en :

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta.$$

6) a) C'est très facile si on sait à peine un peu de trigonométrie, c'est juste là pour aider à faire le b).

b) Soit i et j deux entiers naturels. On prend un réel φ et on applique le a) à $\alpha = i\varphi$ et $\beta = j\varphi$. On obtient à peu près directement le résultat, à ceci près que si $i < j$, comme on n'a défini les c_n que pour

n positif ou nul, il faut profiter de la parité de la fonction consinus pour transformer $\cos[(i-j)\varphi]$ en $\cos(|i-j|\varphi)$ avant de conclure.

7) a) On va montrer par récurrence sur $n \geq 0$ l'énoncé suivant :

(H_n) "p_n est combinaison linéaire de $c_0, \ldots, c_n$ ".

* Pour $n = 0$ c'est immédiat puisque $p_0 = c_0$.

* Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Supposons l'hypothèse (H_{n-1}) vraie.

Il existe alors des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que :

$$p_{n-1} = \alpha_0 c_0 + \cdots + \alpha_{n-1} c_{n-1}.$$

On multiplie cette identité par c_1 en remarquant que $p_{n-1}c_1 = c_1^{n-1}c_1 = c_1^n = p_n$. On obtient :

$$p_n = \alpha_0 c_0 c_1 + \cdots + \alpha_{n-1} c_{n-1} c_1.$$

Dans cette nouvelle identité, focalisons nous sur un produit $c_i c_1$: l'identité du 6 b) montre que ce produit est combinaison linéaire de c_{i+1} et de $c_{|i-1|}$. Chacun des deux entiers $i+1$ et $|i-1|$ appartient à $\{0, \ldots, n\}$, ce qui prouve que $c_i c_1 \in \mathrm{Vect}(c_0, \ldots, c_n)$. Ce dernier ensemble étant un espace vectoriel, il en est de même de leur combinaison linéaire p_n.

* On a ainsi montré par récurrence que (H_n) est réalisée pour tout $n \geq 0$.

b) La famille $(p_0, \ldots, p_n)$ suggérée par l'énoncé est libre, vu la question 4). De plus, vu le a), chacun des vecteurs qui y figure appartient à $\mathrm{Vect}(c_0, \ldots, c_n)$. On peut donc construire une famille de vecteurs de cet espace qui compte $n+1$ items ; ceci entraîne que sa dimension est supérieure ou égale à $n+1$.
Ceci étant dit, la famille $(c_0, \ldots, c_n)$ comporte $n+1$ items et engendre cet espace. Il est donc de dimension inférieure ou égale à $n+1$. Les deux informations mises bout à bout nous assurent qu'il est exactement de dimension $n+1$ puis que sa famille génératrice $(c_0, \ldots, c_n)$ à $n+1$ items en est une base, et donc qu'elle est libre.
Enfin $(p_0, \ldots, p_n)$ est une famille libre de $n+1$ items dans cet espace de dimension $n+1$ donc en est une autre base. En particulier, elle en est une famille génératrice.

8) a) On trouve π et 0, en explicitant sans mal des primitives.

b) On utilise la fomule du 6 b) et on est ramené à intégrer c_{i+j} et $c_{|i-j|}$ toutes deux d'indice strictement positif. Par le a) leurs intégrales sont nulles, donc aussi celle de $c_i c_j$.

c) L'intégrale de c_0^2 est celle de 1 présentée pompeusement : c'est π. L'autre se calcule en utilisant la formule du 6) b) et on trouve $\dfrac{\pi}{2}$.

9) Une première façon de calculer l'intégrale est de remarquer que, vu l'hypothèse liant les $\lambda_i c_i$ la fonction intégrée est la fonction nulle et que l'intégrale est donc nulle.
Une deuxième façon est de la développer en :

$$\lambda_0 \int_0^\pi c_0 c_i + \lambda_1 \int_0^\pi c_1 c_i + \cdots + \lambda_n \int_0^\pi c_n c_i.$$

Au vu des 8 b) et c) tous les termes sauf peut-être un sont nuls dans cette somme. Si $i = 0$ c'est le premier terme qui demeure et l'intégrale vaut $\pi\lambda_0$. Si i est strictement positif le terme qui demeure, valeur de l'intégrale, est $\dfrac{\pi}{2}\lambda_i$.
Dans les deux cas on conclut en rapprochant les deux expressions que $\lambda_i = 0$.
Ceci étant vrai pour tout i, tous les λ_i sont nuls ; ceci prouve la liberté de la famille $(c_0, \ldots, c_n)$.

10) a) Soit φ un réel. On développe par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
p_n(\varphi) = (\cos\varphi)^n &= \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^n}\left(e^{in\varphi} + \binom{n}{1} e^{i(n-2)\varphi} + \binom{n}{2} e^{i(n-4)\varphi} + \cdots + \binom{n}{n-2} e^{i(4-n)\varphi} + \binom{n}{n-1} e^{i(2-n)\varphi} + e^{-in\varphi}\right)
\end{aligned}$$

Pour répondre au cahier des charges, en profitant de la symétrie bien connue de la liste des coefficients binomiaux, il suffit de rassembler côte à côte les termes symétriques par rapport au centre de cette sommation. Ceci se passe de façon marginalement différente selon que n soit pair ou impair et il est sans doute plus confortable d'écrire deux formules différentes ; pour tout $m \geq 0$ on a montré les identités suivantes :

$$p_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} \left(c_{2m+1} + \binom{2m+1}{1} c_{2m-1} + \binom{2m+1}{2} c_{2m-3} + \cdots + \binom{2m+1}{m} c_1 \right)$$

et

$$p_{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}} \left(c_{2m} + \binom{2m}{1} c_{2m-2} + \binom{2m}{2} c_{2m-4} + \cdots + \binom{2m}{m-1} c_2 + \frac{1}{2} \binom{2m}{m} c_0 \right).$$

Dans chacune de ces formules le coefficient de c_n est $1/2^{n-1}$: on constate qu'il n'est pas nul.

b) On a vu au 9) (qui ne reposait que sur les questions 6 et 8 donc sur aucun raisonnement d'algèbre linéaire élaboré préalablement) que $(c_0, \ldots, c_n)$ est libre. Si on écrit en colonnes contiguës les coordonnées de p_0, de p_1, etc... qu'on a déterminé à la question précédente, on obtient un joli tableau carré de réels, avec des zéros au sud-ouest et des coefficients non nuls sur la diagonale dite principale. Comme on l'a remarqué en TD (et comme ce sera systématisé plus tard) l'existence de tels jolis escaliers, traditionnellement soulignés à la craie jaune, prouve la liberté de la famille $(p_0, \ldots, p_n)$.

11) L'intégrale figurant dans a_1 est l'aire d'un triangle rectangle isocèle de côté π donc est $\pi^2/2$, d'où $a_1 = \pi/2$. Pour b_1 un petit calcul est nécessaire, intégration par parties bien sûr et on trouve -2 pour l'intégrale donc $-4/\pi$ pour le coefficient b_1.

12) a) Par hypothèse, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $I(a_0, b_0) \leq I(x, y)$. En particulier $I(a_0, b_0) \leq I(x, b_0)$, c'est-à-dire $u(a_0) \leq u(x)$: c'est exactement dire que u admet un minimum global en a_0.

En développant le carré dans l'intégrale et en regroupant intelligemment les termes, on obtient :

$$u(x) = x^2 \int_0^{\pi} dt - 2x \int_0^{\pi} (f(t) - b_0 \cos t)\, dt + C$$

où C est un réel indépendant de x donné par une formule relativement compliquée.

De cette expression ressort que u est polynomiale de degré 2, et en particulier dérivable. En un point où u admet un minimum, la dérivée de u s'annule.

On fait la même chose pour v qui va être aussi polynomiale, donnée par la formule :

$$v(y) = y^2 \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt - 2y \int_0^{\pi} (f(t) \cos t - a_0 \cos t)\, dt + C'$$

où la aussi C' est une constante qu'il est inutile d'expliciter davantage.

Par le même raisonnement exactement, v admet un minimum en b_0, est dérivable sur $\mathbf{R}$ et a donc une dérivée nulle en b_0.

b) On commence par rendre plus lisibles les expressions fournies pour u et v en remplaçant les intégrales qui y apparaissent par leurs valeurs. Ce nettoyage fait, on a les formules :

$$u(x) = \pi x^2 - 2x\pi a_1 + C$$

et

$$v(y) = \frac{\pi y^2}{2} - y\pi b_1 + C'.$$

On les dérive, on résout les équations du premier degré $u'(x) = 0$ et $v'(y) = 0$ et hop c'est réglé.

13) On développe :

$$
\begin{aligned}
I(a_1+h, b_1+k) = &\int_0^{\pi} \left[(f(t)-a_1-b_1\cos t)-(h+k\cos t)\right]^2\, dt \\
=& I(a_1,b_1) - 2h\int_0^{\pi} (f(t)-a_1-b_1\cos t)\; dt - 2k\int_0^{\pi} (f(t)-a_1-b_1\cos t)\cos t\, dt \\
&+ \int_0^{\pi} (h+k\cos t)^2\, dt.
\end{aligned}
$$

Dans ce calcul, l'intégrale qui vient immédiatement après le $2h$ se laisse couper en trois et calculer ; elle se révêle valoir $\pi a_1 - \pi a_1 - 0 = 0$. De même pour celle immédiatement après le $2k$ qui vaut $\frac{\pi}{2}b_1 - 0 - \frac{\pi}{2}b_1 = 0$. Ce qui reste répond au cahier des charges.
L'intégrale de carré qui termine la formule est positive (les bornes sont bien rangées à l'endroit) et ceci permet de conclure que I admet un minimum en (a_1, b_1). L'unicité se voit soit en raisonnant sur les fonctions continues positives non nulles qui ont une intégrale strictement positive, soit en recyclant le résultat du 12 b), c'est question de goût.